Universidade do Minho
Escola de Ciências

Margarida Isabel Alves Corsino da Silva

Corpos Elásticos em Relatividade Geral

Julho de 2005

UM | 2005

Margarida Corsino da Silva
Corpos Elásticos em Relatividade Geral

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Margarida Isabel Alves Corsino da Silva

Corpos Elásticos em Relatividade Geral

Tese de Mestrado
Mestrado em Matemática e Aplicações à Mecânica

Trabalho efectuado sob a orientação do
Prof. Doutora Maria da Piedade Machado Ramos

Julho de 2005

DECLARAÇÃO

Margarida Isabel Alves Corsino da Silva
Endereço electrónico: mcorsinosilva@hotmail.com   Telefone: 253 264 936
Número de Bilhete de Identidade: 8579137

Título de Tese: Corpos Elásticos em Relatividade Geral

Orientadora: Prof. Doutora Maria da Piedade Machado Ramos

Ano de Conclusão: 2005

Mestrado em Matemática e Aplicações à Mecânica

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTGEGRAL DESTA TESE APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE.

Universidade do Minho, 25 de Julho de 2005

Assinatura:

AGRADECIMENTOS

À Doutora Maria da Piedade Ramos, pela sua orientação e dedicação.

À Professora Doutora Estelita Vaz, pela motivação e estímulo persistente, desde há anos, para que eu fizesse um Mestrado.

Aos colegas e professores do Mestrado, pelo ambiente de amizade e companheirismo criado durante a parte curricular e que, nas sessões conjuntas de estudo, permitiram tornar este curso num espaço de crescimento.

Aos meus pais, cunhada e irmão, pelo apoio constante.

Aos meus alunos que, com o seu querer saber sempre mais, davam sentido ao que eu ía aprendendo e partilhando com eles.

À força que surgia, quando eu menos esperava e mais necessitava.

Corpos Elásticos em Relatividade Geral

No século XVII, com a lei de Hooke, desenvolve-se a Teoria Clássica da Elasticidade. A adaptação de uma teoria da elasticidade à Relatividade Geral surge bastante mais tarde, no final de 1950, com a necessidade de generalizar o estudo de corpos elásticos à Mecânica Relativista para que se compreendesse o comportamento das ondas gravitacionais quando interagem com corpos elásticos sólidos. O objectivo deste trabalho é apresentar um estudo bibliográfico sobre a formulação da Elasticidade em Relatividade Geral, descrevendo a teoria matematicamente, de forma detalhada e simples, e exemplificá-la com alguns exemplos físicos.

No capítulo 1, será apresentada a Teoria da Relatividade Geral, a partir da Mecânica Clássica e da Teoria da Relatividade Restrita, bem como alguns conceitos subjacentes, sendo de destacar a álgebra e cálculo de tensores, atendendo a que as equações da Relatividade são equações tensoriais. A base dos capítulos 2 e 3 é o artigo *Elastic stars in general relativity*: *I. Foundations and equilibrium models*, de Max Karlovini e Lars Samuelson. No capítulo 2, introduzem-se os conceitos gerais da teoria, baseados no facto de se considerar o campo material como uma projecção de uma variedade do tipo espaço-tempo de dimensão quatro numa variedade tridimensional. Como resultados obter-se-ão a forma geral do tensor de impulsão-energia e a sua especificação, no caso de uma métrica fixa ser o único campo tensorial material usado para obter a equação de estado. Apresentar-se-ão, ainda, as equações de movimento de matéria elástica, pelo que se introduzirá uma conexão considerada como o *pull back* da conexão de Levi-Civita associada à métrica do espaço material. Esta conexão é dada pelo tensor diferença da relasticidade que, juntamente com o tensor elasticidade de Hadamard, permitirão reescrever as equações de Euler. No capítulo 3, serão apresentadas as equações de Einstein numa aplicação a espaços-tempo com simetria esférica com matéria elástica. O sistema de equações do movimento será constituído por três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. A solução deste sistema é um espaço-tempo com simetria esférica associado a um campo com características elásticas.

Elastic Bodies in General Relativity

In the XVII century, with Hooke's law, there is a development of the Classic Theory of Elasticity. The adaptation of an elasticity theory to General Relativity appears much later, in the end of 1950, with the necessity of the generalization of the study of elastic bodies to Relativistic Mechanics, to understand the behaviour of gravitational waves when interacting with solid elastic bodies. The aim of this work is to present a bibliographic study about the formulation of Elasticity in General Relativity, describing mathematically the theory, in a detailed and simple way, and exemplifying with some physical examples.

In chapter 1, it will be introduced the General Relativity Theory, from Classical Mechanics and Special Relativity, and some subjacent concepts, in particular tensor algebra and calculus, since the Relativity equations are tensorial equations. The basis of chapters 2 e 3 is the article *Elastic stars in general relativity*: *I. Foundations and equilibrium models*, from Max Karlovini and Lars Samuelson. In chapter 2, general concepts of the theory will be introduced, based on the foundation that the matter field is a mapping from the four-dimensional spacetime manifold to an abstract three-dimensional manifold. The result will be the general form of the stress-energy tensor and its specialization to the case when a fixed metric is the only material space tensor field which is used to set up the equation of state. Also the matter equations of motion will be discussed and, to this end, there will be introduced a spatially projected connection on spacetime which can be viewed as the *pull back* of the Levi-Civita connection associated with the material space metric. This projected connection is given by the relativistic elasticity difference tensor that with the relativistic Hadamard elasticity tensor allow to rewrite the Euler equations. In chapter 3, the Einstein's equations for static spherically symmetric configurations with an elastic matter source will be discussed. The full set of equations of motion is found to form a system of three first-order ordinary differential equations. The solution of this system is a spacetime with spherically symmetry associated to a field with elastic characteristics.

ÍNDICE

Agradecimentos ii

Resumo iii

Lista de Figuras ix

1. A Relatividade Geral 1

1.1. Mecânica Clássica 3

1.1.1. Referencial 4

1.1.2. Referencial Inercial 5

1.1.3. As transformações de Galileu 6

1.2. Variedade diferencial e campo de tensores 9

1.2.1. Tensores 9

1.2.2. Variedade 10

1.2.3. Transformação de coordenadas 11

1.2.3.1. O jacobiano da transformação 12

1.2.4. Tensores Contravariantes 13

1.2.5. Tensores Covariantes 15

1.2.6. Tensores Mistos 16

1.2.7. Campo de Tensores 16

1.2.8. Derivada Parcial de um tensor 17

1.2.9. A Derivada de Lie 18

1.2.10. Conexão Afim e Derivada Covariante de um Tensor 22

1.2.11. Métrica 25

1.2.12. Conexão Métrica 26

1.2.13. Tensor de Curvatura 29

1.2.14. Métrica Plana 30

1.2.15. Densidades Tensoriais. 31

1.2.16. O símbolo de Levi-Civita 32

1.2.17. O determinante da métrica 33

1.2.18. Integrais e Teorema de Stokes 36

1.2.19. Equações de Euler-Lagrange 38

1.3. A Relatividade Restrita: os axiomas de Einstein 41

1.3.1. Princípios 43

1.3.2. A constância da Velocidade da Luz 44

1.3.3. Espaço-tempo de Minkowski 45

1.3.4. O Cone de Luz 46

1.3.5. Transformações de Lorentz 47

1.3.5.1. Derivação *standard* das Transformações de Lorentz. 47

1.3.5.2. O Grupo de Lorentz 51

1.3.5.3. Dilatação do tempo 52

1.3.5.4. Contracção do comprimento 54

1.3.6. 4-Vectores 55

1.3.6.1. 4-posição 55

1.3.6.2. 4-velocidade e 4-aceleração 55

1.3.6.3. 4-Força e 4-Momento 56

1.3.6.4. 4-força de Minkowski 57

1.4. A Relatividade Geral 58

1.4.1. Os princípios 59

1.4.1.1. Princípio de Mach 59

1.4.1.2. Princípio de Equivalência 59

1.4.1.3. Princípio de Covariância 64

1.4.1.4. Princípio da Copulação Mínima Gravitacional 65

1.4.1.5. Princípio da Correspondência 66

1.4.2. As equações de campo 66

1.4.2.1. Experiências com elevadores 66

1.4.2.2. Equação do desvio de Newton 69

1.4.2.3. A equação do desvio geodésico 71

1.4.2.4. A correspondência Newtoniana 75

1.4.2.5. As equações da Relatividade Geral no vácuo 77

1.4.2.6. Formulação da Teoria da Relatividade Geral 79

1.4.2.7. As equações de campo da Relatividade Geral 80

1.4.3. Relatividade Geral a partir do Princípio Variacional 82

1.4.3.1. Restrições diferenciais nas equações de campo 82

1.4.3.2. Um exemplo simples 84

1.4.3.3. O Lagrangiano de Einstein 85

1.4.3.4. As equações gerais de campo 86

1.5. O tensor de impulsão-energia 87

1.5.1. *Incoherent matter* ou poeira 87

1.5.2. Fluido Perfeito 91

1.5.3. Equações de Maxwell 92

1.5.4. O tensor de impulsão-energia de Maxwell 94

1.6. A solução de Schwarzchild 98

1.6.1. Soluções estacionárias 98

1.6.2. Campos de vectores ortogonais à hipersuperfície 99

1.6.3. Soluções estáticas 103

1.6.4. Soluções com simetria esférica 105

1.6.5. A solução de Schwarzchild 109

1.6.6. Propriedades da solução de Schwarzchild 111

2. **Elasticidade na Mecânica Relativista** 113

2.1. Elasticidade Clássica 114

2.1.1. Desenvolvimento Histórico 114

2.1.2. Deformação 116

2.1.3. Leis da Elasticidade 117

2.2. Elasticidade na Mecânica Relativista 118

2.3. Equações de movimento de matéria elástica 133

3. **Aplicações a espaços-tempo estáticos com simetria esférica** 143

Bibliografia 154

LISTA DE FIGURAS

1.1 Representação do vector de posição **r** de um ponto P num referencial cartesiano. 5

1.2 Dois referenciais S e S , numa configuração *standard* num dado instante t. 8

1.3 Representação da variedade V. Adaptado de [14]. 11

1.4 Campo de vectores tangentes resultante de uma congruência de curvas. Adaptado de [7]. 18

1.5 Uso de congruências para comparar tensores em pontos vizinhos. Adaptado de [7]. 19

1.6 Vector paralelo $X^i\ x$ X^i no ponto Q. Adaptado de [7]. 23

1.7 Cone nulo sem a terceira dimensão z. Adaptado de [7]. .47

1.8 Rotação no espaço x, T de valor 49

1.9 Acontecimentos sucessivos registados por um relógio fixo em S. 53

1.10 Movimento de um corpo com velocidade em relação a S. 54

1.11 O elevador num foguetão. Adaptado de [7]. 62

1.12 O elevador num foguetão sem aceleração. Adaptado de [7]. 62

1.13 O elevador na superfície da terra. Adaptado de [7]. 62

1.14 O elevador deixado cair em queda livre. Adaptado de [7]. 62

1.15 Princípio da Correspondência da Teoria da Relatividade Geral. 66

1.16 O elevador num foguetão. Adaptado de [7]. 68

1.17 O elevador num foguetão sem aceleração. Adaptado de [7]. 68

1.18 O elevador na superfície da terra. Adaptado de [7]. 68

1.19 O elevador deixado cair em queda livre. Adaptado de [7]. 68

1.20 Partículas em queda livre no instante t. Adaptado de [7]. 70

1.21 As linhas de universo de partículas de poeira.Adaptado de [7]. 88

1.22 Duas partículas de gás num tubo num fluido (a) não estacionário, (b) estacionário e (c) estático. Adaptado de [7]. 98

1.23 Família de hipersuperfícies rotulada por . Adaptado de [7]. 100

1.24 Campo de vectores ortogonais a n^a num ponto P. Adaptado de [7]. 101

1.25 Campo de vectores X^a ortogonal à hipersuperfície. Adaptado de [7]. 101

1.26 As coordenadas esféricas e . Adaptado de [7]. 107

CAPÍTULO 1

A *Teoria da Relatividade* surge em duas etapas e altera profundamente as noções de espaço e tempo.

Um dos maiores triunfos da *teoria electromagnética* de Maxwell (1864) foi a explicação da propagação da luz como um fenómeno ondulatório: a luz é uma onda electromagnética que se propaga no espaço. Mas, a física do século XIX e o seu conceito mecanicista do universo exigiam um meio para a propagação das referidas ondas - o éter - o que originou um novo problema: a detecção do movimento terrestre através do éter.

Foram várias as experiências realizadas para resolver esta questão. Michelson e Morley (1887) procuraram medir a velocidade da luz em relação à terra e a sua variação direccional. Fizeau (1849), Mascart (1872) e, posteriormente, Lord Rayleigh (1902) tentaram encontrar um efeito, esperado, do movimento da terra no índice de refracção de certos dieléctricos. Nenhuma destas experiências teve sucesso e a resposta mais fácil para estes resultados seria que o movimento da terra arrastaria consigo o éter. Esta explicação apenas conseguiu originar novas dificuldades.

Lorentz, entre 1892 e 1909, também tentou apresentar uma justificação e desenvolveu uma teoria para o éter baseada em duas hipóteses: a contracção longitudinal de corpos rígidos e a dilatação do tempo em movimento no éter com velocidade v, através de um factor $\left(1 - v^2/c^2\right)^{\frac{1}{2}}$, em que c é a velocidade da luz. Este factor teria influência em todos os aparelhos de medida construídos para medir o ”desvio do éter”, neutralizando, também, os seus efeitos.

Em 1905, Albert Einstein formula a *Teoria da Relatividade Restrita* segundo a qual a distância e o tempo podem ter diferentes medidas, de acordo com diferentes observadores. Não existem, portanto, espaço e tempo absolutos, mas grandezas relativas ao sistema de referência segundo o qual são descritas.

No princípio que a origina é elevada à condição de axioma, a completa equivalência de todos os referenciais de inércia e nele é explicado por que todas as experiências para detectar o ”desvio do éter” foram infrutíferas. Numa primeira abordagem, o princípio da Relatividade parece resumir-se à aceitação dos resultados nulos das experiências para a detecção do ”desvio do éter”, mas a nova teoria, com base neste princípio e no axioma sobre a invariância da velocidade da luz, tomava forma.

Com esta teoria, todas as leis da física são modificadas, sendo válidas em todos os referenciais inerciais, dando origem a uma nova teoria do espaço-tempo, à relatividade da simultaneidade e à existência de uma velocidade limite para todas as partículas e ondas, a uma nova mecânica na qual a massa aumenta com a velocidade, à equação $E = mc^2$ e à teoria de Broglie sobre a dualidade onda-partícula.

Einstein estava satisfeito com a sua Teoria da Relatividade Restrita, mas sabia que ela não estava completa, pois considerava o movimento linear uniforme, mas não abrangia o movimento acelerado que é comum na terra e em todo o universo. Einstein sabia que tinha que completar a sua teoria de modo a que ela abrangesse o movimento não uniforme.

Na teoria também não era imediatamente claro se a gravitação seria incluída numa generalização.

Assim, dez anos depois do aparecimento da Teoria da Relatividade Restrita, Einstein estende a noção de tempo-espaço à existência de gravitação. A *Teoria Geral da Relatividade* (1915) é também uma teoria da gravitação capaz de explicar a força de atracção pela geometria espaço-tempo. Enquanto Newton descrevera a gravitação como uma queda, para Einstein trata-se de uma questão espacial. Quando um corpo está em queda livre, isto é, sem influência de qualquer força, os seus movimentos apenas exprimem o espaço-tempo. A presença de um corpo, num determinado local, causa uma distorção no espaço próximo dele.

1.1. Mecânica Clássica

A Mecânica Clássica é também conhecida por Mecânica Newtoniana, uma vez que, no final do século XVII, Newton fornece uma série de leis, ditadas de maneira inequívoca pela experiência, a partir das quais tudo o resto poderia ser deduzido. As previsões de a *força ser dada pelo produto da massa pela aceleração*, $F \quad ma$, e verificar-se a *igualdade da acção e da reacção* adequam-se, perfeitamente, aos fenómenos, deixando pouco lugar a dúvidas no que se refere à sua validade.

1.1.1 Referencial

Para a apresentação desta teoria - a Mecânica Clássica - é fundamental o conceito de referencial. Um **acontecimento** é um fenómeno que ocorre numa parte do espaço suficientemente pequena, pelo que pode ser considerado um ponto e num intervalo também muito pequeno, podendo ser considerado um instante. Matematicamente, o acontecimento pode definir-se por quatro coordenadas x^0, x^1, x^2, x^3 em que x^0 corresponde à coordenada temporal t e x^1, x^2 e x^3 correspondem às coordenadas espaciais, x, y e z, respectivamente.

Define-se **sólido** ou **corpo rígido** como aquele em que as distâncias entre as partículas que o constituem não variam com o tempo. Através de processos físicos de medição, é possível determinar pontos P que respeitam a condição de não variarem a distância às partículas do corpo. O sistema constituído pelo corpo rígido e por estes pontos P é chamado **sistema de referência** ou **referencial**. Ao conjunto de pontos P dá-se o nome de **espaço do referencial**. Não tendo este corpo extensão física, considera-se uma **partícula** ou um **ponto de massa**. Admite-se que uma partícula ocupa, em cada instante, apenas um ponto do espaço do referencial.

Considere-se um referencial cartesiano em que o corpo se desloca em linha recta ao longo do eixo OX. O movimento deste corpo pode representar-se através de um diagrama em que se marca a posição de alguns pontos do corpo em relação ao tempo. À curva formada neste diagrama chama-se **história**. Os **observadores** são indivíduos equipados com relógios e meios físicos de medição. Nesta teoria, é assumido que quaisquer dois observadores, a partir do momento em que sincronizam os seus relógios, estão sempre de acordo em relação ao tempo de um acontecimento, independentemente do seu movimento relativo. Para os observadores, o tempo é um conceito absoluto. Desta forma, para representar um acontecimento no espaço, será apenas necessário ao observador escolher uma origem no espaço e um conjunto de três eixos cartesianos. Assim, o relógio do observador, o equipamento de medida e os três eixos formam um referencial.

1.1.2. Referencial Inercial

Considere-se O um ponto na origem das coordenadas que coincida com uma dada partícula de um corpo rígido. Liguem-se ao corpo três réguas rígidas rectilíneas não complanares que, prolongadas, definirão três eixos: OX, OY e OZ, e definam-se três vectores com a direcção destes eixos: $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_z$.

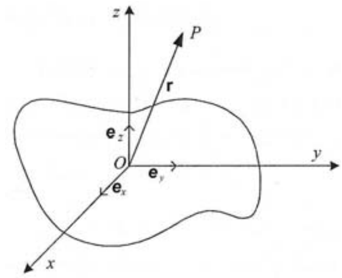

Figura 1.1.: Representação do vector de posição **r** de um ponto P num referencial cartesiano.

O **vector posição** de um ponto P qualquer do espaço do referencial é

$$\mathbf{r} \quad \overrightarrow{OP} \quad xe_x \quad ye_y \quad ze_z \tag{1.1}$$

sendo x, y e z as **coordenadas cartesianas** de P.

Considera-se que uma partícula está em **repouso** ou em **movimento**, relativamente a um referencial S, se o seu vector posição, em relação a esse referencial, for **invariável** ou **variar**, respectivamente, com o tempo.

Seja $\mathbf{r}\ t$ o vector posição de uma partícula relativamente ao referencial S. Relativamente a S, a **velocidade da partícula** e a **aceleração da partícula** definem-se, respectivemanente, como

$$\mathbf{v} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x \quad \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y \quad \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z \tag{1.2}$$

$$\mathbf{a} \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{e}_x \quad \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{e}_y \quad \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{e}_z \tag{1.3}$$

Define-se, então, um **referencial de inércia** ou **referencial inercial** como sendo aquele em que todas as partículas livres (partículas não actuadas por forças ou actuadas por um sistema de forças de resultante nula) têm velocidade constante e, consequentemente, aceleração nula.

Para Galileu, todos os referenciais eram equivalentes para o estudo do movimento; Newton reconhece que isso é apenas verdade na cinemática e que deixa de o ser na dinâmica. As leis de Newton são apenas válidas nos referencias inerciais.

1.1.3.As transformações de Galileu

A forma como diferentes observadores observam o mesmo fenómeno é o ponto central da teoria da relatividade. Na teoria de Newton, é postulada a existência de referenciais inerciais preferenciais. Este postulado está presente na primeira lei de Newton, podendo ser traduzido da seguinte forma:

Um corpo (*ou ponto material*) *conserva o seu estado de repouso ou de movimento rectilíneo uniforme até que a aplicação da força exercida por outros corpos o modifique*.

A primeira lei de Newton mostra que o estado de repouso ou de movimento rectilíneo uniforme não requer, para se conservar inalterável, a aplicação de quaisquer forças externas. Assim se manifesta a característica dinâmica específica dos corpos a que se dá o nome de *inércia*. Esta primeira lei de Newton denomina-se, também, **princípio da inércia**, e o movimento de um corpo não sujeito à acção das forças exercidas por outros corpos chama-se **movimento de inércia**.

Assim, além de existir um conjunto de referenciais privilegiados chamados inerciais, uma vez encontrado um referencial de inércia, todos os outros que, em relação a ele, estejam em repouso ou em movimento rectilíneo uniforme são também referenciais inerciais (se isto não se verificasse, a primeira lei de Newton perderia a sua validade). As leis de transformação que relacionam um referencial inercial a um outro são as **transformações de Galileu** que constituem o **grupo de Galileu**.

Sejam dois referenciais inerciais S e S, ambos numa configuração *standard*, i.e., eixos paralelos e S movendo-se ao longo do eixo positivo OX

de S com velocidade constante.

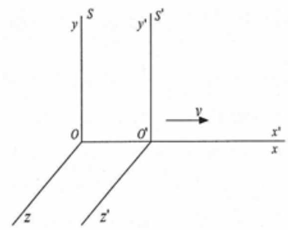

Figura 1.2. : Dois referenciais S e S , numa configuração *standard* num dado instante t.

Partindo do princípio que os observadores sincronizaram os seus relógios de forma a que as origens do tempo $t \quad t \quad 0$ nos dois referenciais sejam tomadas no instante em que os dois referenciais coincidem, tem-se as seguintes condições:

1. $O\,X$ desliza sobre OX;

2. $O\,Y\,//OY$ e $O\,Z\,//OZ$;

3. $t \quad t \quad 0$ quando $O \quad O$.

Considere-se o acontecimento A que, consoante o referencial que o mede pode ser definido por três coordenadas espaciais x,y,z e uma temporal t, em S e, da mesma forma, por $x\,,y\,,z$ e t em S . De acordo com a Física Clássica, acertando-se ambos os relógios tem-se $t \quad t$ e, dadas as condições atrás referidas, $|OO \quad t|$. Assim, a relação entre as coordenadas espaciais e o tempo em S e S é dada por

$$\begin{array}{lll} x \quad x \quad t & \qquad & x \quad x \quad t \\ y \quad y & & y \quad y \\ z \quad z & & z \quad z \\ t \quad t & & t \quad t \end{array} \qquad (1.4)$$

Estas equações são as **transformações de Galileu** e constituem o **grupo de Galileu**. A última equação apresenta, de forma clara, a assumpção de tempo absoluto na teoria de Newton.

As leis de Newton são válidas apenas para referenciais inerciais o que implica, de um ponto de vista matemático, que têm que ser **invariantes** perante uma transformação de Galileu. As transformações de Galileu formam o **grupo de invariância da Mecânica Clássica**.

1.2. Variedade diferencial e campo de tensores

1.2.1. Tensores

Para que sejam válidas, as leis da Física devem ser independentes dos sistemas de coordenadas usados para as exprimir matematicamente. Em Mecânica, trabalha-se com quantidades físicas, que são independentes de qualquer sistema de coordenadas em particular, que se utilize para as descrever. Frequentemente, usa-se um sistema de coordenadas conveniente. A estas quantidades chama-se **tensores**.

Como ser matemático, um tensor tem uma existência que é independente de um qualquer sistema de coordenadas, embora, num determinado sistema de coordenadas, possa ser caracterizado por um outro conjunto de quantidades que são as **componentes do tensor**. Especificar as componentes de um tensor num determinado sistema de coordenadas, implica que fiquem determinadas as coordenadas desse tensor em qualquer outro. De certa forma, a **lei de transformação das componentes** de um tensor pode ser utilizada como um meio para definir um tensor.

As leis físicas usadas em Mecânica são expressas através de equações tensoriais. Uma vez que as transformações tensoriais são lineares e homogéneas, se estas equações forem válidas num determinado sistema de coordenadas também o serão noutro. Esta *invariância* das equações tensoriais durante uma transformação de coordenadas é uma das principais razões da sua utilização (e da sua utilidade) em Mecânica.

Começar-se-á o estudo dos tensores em espaços de dimensão n, sendo objectos definidos numa entidade geométrica chamada **variedade**.

Em Relativida Geral, a dimensão é quatro, sendo a variedade o espaço-tempo. Como se verá à frente, na secção 1.4., será de grande importância um dos princípios da Relatividade Geral, o Princípio da Covariância, que refere que as equações físicas deverão escrever-se na forma tensorial.

1.2.2. Variedade

Pode considerar-se uma variedade, em termos simples, como um espaço contínuo que, localmente, se assemelha a um espaço euclidiano de dimensão n, i.e., R^n.

Qualquer espaço de dimensão m num espaço euclidiano de dimensão n $m \quad n$ pode ser considerado uma variedade. Em termos gerais, uma variedade é qualquer conjunto que pode ser continuamente parametrizado. O número de parâmetros independentes é a dimensão da variedade sendo esses parâmetros as coordenadas da variedade. Pode, então, definir-se variedade diferenciável de uma forma rigorosa do seguinte modo:

Uma **variedade** é um conjunto V tal que, para cada ponto x de V, existe uma vizinhança aberta $U_x \quad V$ e uma função contínua e bijectiva $_x$ que faz corresponder a U_x uma vizinhança em R^n e $_x{}^1$ é contínua.

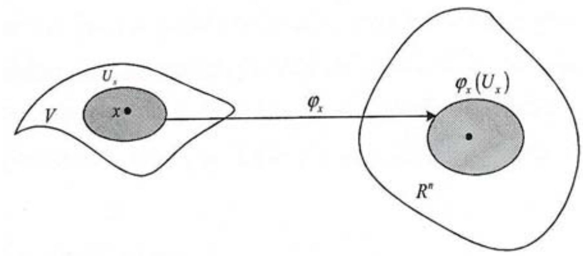

Figura 1.3. : Representação da variedade V.

Em Relatividade Restrita e em Relatividade Geral, que à frente serão objecto de estudo, os espaços-tempo são variedades sem e com curvatura, respectivamente, de dimensão quatro.

1.2.3. Transformação de Coordenadas

Como atrás foi referido, uma variedade é representada por um conjunto de pontos, correspondendo a cada ponto um conjunto de coordenadas. Sejam $x^1, x^2, ..., x^n$ as coordenadas de um ponto no sistema de coordenadas x^a. Existem n relações independentes entre as coordenadas de dois sistemas e a transformação de coordenadas $x^a \quad x^{a}$ é dada pelo seguinte conjunto de equações:

$$x^{a} \quad f^a \; x^1, x^2, ..., x^n \qquad\qquad a \quad 1, 2, ..., n \qquad\qquad (1.5)$$

em que f^a representa n equações unívocas, contínuas e de derivadas parciais contínuas. Este conjunto de n equações faz com que um ponto da variedade que antes era definido pelo sistema de coordenadas $x^1, x^2, ..., x^n$ seja agora definido por $x^{1}, x^{2}, ..., x^{n}$. A equação (1.5) pode ainda ser escrita na forma $x^{a} \quad f^a \; x^a$, em que $a \quad 1, 2, ..., n$, sendo n a dimensão da variedade e f^a funções do antigo sistema de coordenadas. Uma vez que $x^{a} \; x$ representa as n funções $f^a \; x$, a equação (1.5) pode escrever-se como

$$x^{a} \quad x^{a} \; x \; . \qquad\qquad (1.6)$$

1.2.3.1. O jacobiano da transformação

Derivando a equação (1.6) em relação às coordenadas x^b, obtêm-se n^2 derivadas parciais de primeira ordem. Pela regra da cadeia, tem-se

$$dx^{1} \quad \frac{x^{1}}{x^1} dx^1 \quad \frac{x^{1}}{x^2} dx^2 \quad ... \quad \frac{x^{1}}{x^n} dx^n$$

$$dx^{2} \quad \frac{x^{2}}{x^1} dx^1 \quad \frac{x^{2}}{x^2} dx^2 \quad ... \quad \frac{x^{2}}{x^n} dx^n$$

$$...$$

$$dx^{n} \quad \frac{x^{n}}{x^{1}}dx^{1} \quad \frac{x^{n}}{x^{2}}dx^{2} \quad \ldots \quad \frac{x^{n}}{x^{n}}dx^{n} \qquad (1.7)$$

e este conjunto de equações pode ser escrito na forma

$$dx^{a} \quad \frac{x^{a}}{x^{b}}dx^{b}. \qquad (1.8)$$

Na forma matricial, obtém-se uma matriz de transformação D, n x n, de coeficientes

$$D \quad \left[\frac{x^{a}}{x^{b}}\right] \quad \begin{bmatrix} \frac{x^{1}}{x^{1}} & \frac{x^{1}}{x^{2}} & \ldots & \frac{x^{1}}{x^{n}} \\ \frac{x^{2}}{x^{1}} & \frac{x^{2}}{x^{2}} & \ldots & \frac{x^{2}}{x^{n}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{x^{n}}{x^{1}} & \frac{x^{n}}{x^{2}} & \ldots & \frac{x^{n}}{x^{n}} \end{bmatrix} \qquad (1.9)$$

Esta matriz D é a **matriz Jacobiana** e o seu determinante $\bar{J}$ é o **Jacobiano da transformação**

$$\bar{J} \quad \left|\frac{x^{a}}{x^{b}}\right| \qquad (1.10)$$

que é não nula para um subconjunto de valores de x^{b}. Pelo teorema da função implícita, pode resolver-se a equação (1.6) para o sistema de coordenadas x^{a} e obter a transformação inversa de (1.6)

$$D^{\ 1} : x^{a} \quad x^{a}\ x \ . \qquad (1.11)$$

O Jacobiano da transformação inversa define-se por

$$J \quad \left|\frac{x^{a}}{x^{b}}\right| \qquad (1.12)$$

em que J é o inverso de J, ou seja,

$$\frac{x^{a}}{x^{c}}\frac{x^{c}}{x^{b}} \quad \frac{x^{a}}{x^{c}}\frac{x^{c}}{x^{b}} \quad {}^{a}_{b} \qquad (1.13)$$

em que ${}^{a}_{b}$ é o símbolo de Kronecker definido por

$${}^{a}_{b} \quad \begin{matrix} 1 & a & b \\ 0 & a & b \end{matrix} \ ,$$

concluindo-se, então que

$$J \quad \frac{1}{J} \tag{1.14}$$

1.2.4. Tensores Contravariantes

Considerem-se dois pontos vizinhos, P e Q, na variedade, com coordenadas x^a e $x^a \quad dx^a$, respectivamente. Os dois pontos definem um deslocamento infinitesimal ou um vector infinitesimal $\overrightarrow{PQ}$. O vector não será considerado livre, mas com ponto de aplicação em P. As componentes deste vector no sistema de coordenadas x^a são dx^a. Num outro sistema de coordenadas, serão $dx^{\,a}$, verificado-se a relação

$$dx^{\,a} \quad \frac{x^{\,a}}{x^b} dx^b. \tag{1.15}$$

A matriz de transformação que surge nesta equação será calculada no ponto P, i.e., de uma forma correcta, deveria ser escrita como

$$dx^{\,a} \quad \left[\frac{x^{\,a}}{x^b}\right]_P dx^b, \tag{1.16}$$

mas, tendo esta noção, usar-se-á a notação de (1.15). $x^{\,a}/\ x^b\ _P$ é uma matriz n x n de números reais. A transformação é, então, homogénea e linear.

Um **vector contravariante** ou um **tensor contravariante de ordem um** é um conjunto de quantidades, X^a, no sistema de coordenadas x^a, associado a um ponto P, que transforma sob uma mudança de coordenadas de acordo com

$$X^{\,a} \quad \frac{x^{\,a}}{x^b} X^b, \tag{1.17}$$

em que a matriz de transformação é calculada em P. O vector infinitesimal

dx^a é um caso especial de (1.17) onde as componentes de X^a são infinitesimais.

Generalizando a definição (1.17), obter-se-ão tensores contravariantes de ordem superior. Assim, um **tensor contravariante de ordem dois** é um conjunto de n^2 quantidades associadas a um ponto P que se denota por X^{ab} no sistema de coordenadas x^a e transforma de acordo com

$$X^{ab} \quad \frac{x^a}{x^c}\frac{x^b}{x^d}X^{cd}. \qquad (1.18)$$

As quantidades X^{ab} são as componentes no sistema de coordenadas x^a, as matrizes de transformação são calculadas em P e a lei de transformação envolve dois índices mudos c e d. A definição de tensores de ordem superior obtém-se de forma análoga. Um caso importante é o tensor de ordem zero que é chamado **escalar** ou **escalar invariante** , que transforma de acordo com

$$, \qquad (1.19)$$

em P.

1.2.5. Tensores Covariantes

Seja

$$x^a \qquad (1.20)$$

uma função real na variedade, i.e., em cada ponto P na variedade, P é um número real. Assume-se ainda que é contínua e diferenciável, pelo que se obtêm coeficientes diferenciáveis $/ \ x^a$.

Uma vez que x^a pode ser visto como uma função de x^b, a equação (1.20) pode ser escrita de forma equivalente por

$$x^a \quad x \quad . \tag{1.21}$$

Derivando em ordem a x^{b}, obtém-se

$$\frac{}{x^{b}} \quad \frac{}{x^{a}}\frac{x^{a}}{x^{b}}. \tag{1.22}$$

Trocando a ordem dos termos, o índice mudo e os índices livres (de b para a), vem

$$\frac{}{x^{a}} \quad \frac{x^{b}}{x^{a}}\frac{}{x^{b}}, \tag{1.23}$$

que envolve a inversa da matriz de transformação $x^{b}/ \; x^{a}$. Assim, um **vector covariante** ou **tensor covariante de ordem um** é um conjunto de quantidades, X_a, no sistema de coordenadas x^a, associado a um ponto P, que transforma de acordo com

$$X_a \quad \frac{x^{b}}{x^{a}}X_b. \tag{1.24}$$

Mais uma vez, a matriz de transformação é calculada em P. De forma semelhante, um tensor covariante de ordem dois é definido pela lei de transformação

$$X_{ab} \quad \frac{x^{c}}{x^{a}}\frac{x^{d}}{x^{b}}X_{cd}, \tag{1.25}$$

e, analogamente, se procede para tensores de ordem superior.

1.2.6. Tensores Mistos

Um tensor diz-se misto de ordem $m \quad r \quad s$, contravariante de ordem r e covariante de ordem s, se as suas componentes $X^{a_1 a_2 \ldots a_r}_{b_1 b_2 \ldots b_s}$ em x^a e $X^{a_1 a_2 \ldots a_r}_{b_1 b_2 \ldots b_s}$ em x^{a} respeitarem a seguinte relação de transformação

$$X'^{a_1a_2\ldots a_r}_{b_1b_2\ldots b_s} = \frac{\partial x'^{a_1}}{\partial x^{c_1}}\frac{\partial x'^{a_2}}{\partial x^{c_2}}\cdots\frac{\partial x'^{a_r}}{\partial x^{c_s}}\frac{\partial x^{d_1}}{\partial x'^{b_1}}\frac{\partial x^{d_2}}{\partial x'^{b_2}}\cdots\frac{\partial x^{d_r}}{\partial x'^{b_s}}X^{c_1c_2\ldots c_r}_{d_1d_2\ldots d_s}. \qquad (1.26)$$

Se um tensor misto tem ordem contravariante r e covariante s diz-se que é do tipo (r,s).

1.2.7. Campo de Tensores

Um tensor do tipo (r,s) é um conjunto de quantidades definidas num ponto P da variedade V que respeita a lei de transformação (1.26). Um **campo tensorial** definido numa dada região da variedade é uma associação de um tensor, do mesmo tipo, a cada ponto dessa região, i.e.,

$$P \to T^{i\ldots}_{j\ldots}(P) \qquad (1.27)$$

em que $T^{i\ldots}_{j\ldots}(P)$ são as componentes do tensor em P. O campo tensorial diz-se diferenciável ou contínuo se todas as suas componentes, em todos os sistemas de coordenadas, forem funções diferenciáveis ou contínuas de coordenadas. O campo tensorial diz-se suave, se as suas componentes forem de ordem C^∞.

A lei de transformação para um campo de vectores contravariantes é

$$X'^a(x') = \left[\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\right]_P X^b(x) \qquad (1.28)$$

em cada ponto P na região, uma vez que as componentes X^a são funções das coordenadas no sistema x^a e as novas componentes X'^a são funções das novas coordenadas no sistema x'^a.

1.2.8. Derivada Parcial de um Tensor

Considere-se a expressão

$$X'^{i} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}} X^{j} \tag{1.34}$$

que representa a lei de transformação de coordenadas de um tensor contravariante de ordem um. Derivando esta expressão em relação a x'^{k} obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial X'^{i}}{\partial x'^{k}} &= \frac{\partial}{\partial x'^{k}}\left(\frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}} X^{j}\right) \\ &= \frac{\partial x^{r}}{\partial x'^{k}} \frac{\partial}{\partial x^{r}}\left(\frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}} X^{j}\right) \\ &= \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}} \frac{\partial x^{r}}{\partial x'^{k}} \frac{\partial X^{j}}{\partial x^{r}} + \frac{\partial^{2} x'^{i}}{\partial x^{j} \partial x^{r}} \frac{\partial x^{r}}{\partial x'^{k}} X^{j}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

O primeiro termo do resultado representa uma lei de transformação de um tensor do tipo $(1,1)$. No entanto, a presença do segundo termo impede que a derivada parcial de um tensor seja um tensor. Por definição, o processo de derivação envolve a comparação de quantidades definidas em dois pontos vizinhos, P e Q, a dividir por um parâmetro, δu, que representa a distância entre os dois pontos, na forma

$$\lim_{\delta u \to 0} \frac{X^{i}(P) - X^{i}(Q)}{\delta u}. \tag{1.36}$$

Tendo em consideração as leis de transformação

$$X'^{i}_{P} = \left[\frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}}\right]_{P} X^{j}_{P} \quad \text{e} \quad X'^{i}_{Q} = \left[\frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{j}}\right]_{Q} X^{j}_{Q}, \tag{1.37}$$

que representam matrizes de transformação definidas em diferentes pontos, logo verifica-se que $X'^{i}_{P} - X'^{i}_{Q}$ não é um tensor.

1.2.9. A derivada de Lie

Considere-se uma **congruência de curvas** definidas de forma que apenas uma curva passa em cada ponto da variedade. Então, dada qualquer curva da congruência

$$x^a \quad x^a \; u \;, \tag{1.38}$$

ela poderá ser usada para definir o campo de vectores tangentes $\frac{dx^a}{du}$ ao longo da curva. Fazendo isto para todas as curvas da congruência, obtém-se um campo de vectores X^a (dado por $\frac{dx^a}{du}$ em cada ponto) definido em toda a variedade.

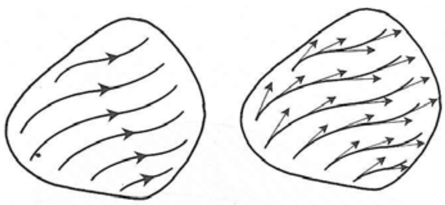

Figura 1.4.: Campo de vectores tangentes resultante de uma congruência de curvas.

Da mesma forma, um campo de vectores $X^a \; x$, não nulo, definido na variedade, poderá ser usado para definir uma congruência de curvas na variedade chamada **órbitas** ou **trajectórias** de X^a. Estas curvas obtêm-se pela resolução das equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx^a}{du} \quad X^a \; x \; u \quad . \tag{1.39}$$

Assuma-se, então, que X^a é dado e que se constrói uma congruência local de curvas. Suponha-se que se tem um campo tensorial $T^{a\ldots}_{b\ldots} \; x$ que se quer derivar usando X^a. Para isso, usar-se-á uma congruência de curvas para **arrastar** o tensor num ponto P, i.e., $T^{a\ldots}_{b\ldots} \; P$, ao longo da curva passando de P para um ponto vizinho Q, comparando o tensor que se obtém com aquele que já lá existe, $T^{a\dots}_{b\dots}\;\; Q$.

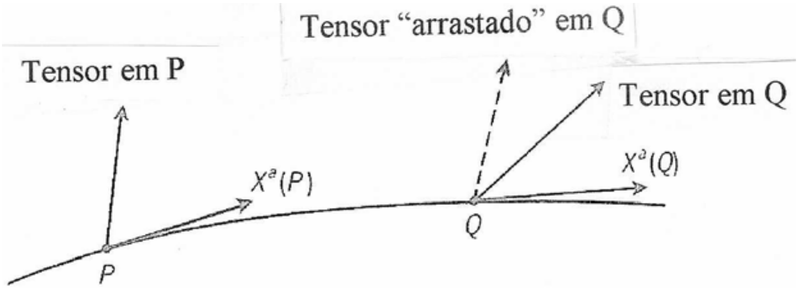

Figura 1.5. : Uso de congruências para comparar tensores em pontos vizinhos.

Uma vez que o tensor obtido será do mesmo tipo que o já existente em Q, poder-se-ão subtrair os dois tensores em Q e definir a derivada por um limite quando Q se aproxima de P. Veja-se o caso de um campo de tensores contravariantes de ordem dois, $T^{ab}\;\; x$.

Considere-se a transformação

$$x'^a \quad x^a \quad uX^a\;\; x \;\; , \qquad (1.40)$$

onde u é muito pequeno. Esta transformação deverá ser vista como o aproximar do ponto P, de coordenada x^a, ao ponto Q, de coordenadas $x^a \quad uX^a\;\; x$, (que se encontra na mesma curva da congruência de P que X^a gera) considerando as coordenadas de cada ponto no mesmo sistema, i.e.,

$$P \quad Q$$

$$x^a \quad x^a \quad uX^a\;\; x \;\; .$$

Derivando (1.40), obtém-se

$$\frac{x'^a}{x^b} \quad {}^{a}_{b} \quad u \;\; {}_bX^a. \qquad (1.41)$$

Considere-se, também, o campo de tensores T^{ab} no ponto P. As suas componentes em P são $T^{ab}\;\; x$ e, sob a transformação (1.40), obtém-se

$$T^{ab}\ x \qquad T^{ab}\ x \ ,$$

i.e., a transformação ”arrasta” o tensor T^{ab} de P para Q. As componentes deste tensor são dadas pelas usuais leis de transformação de tensores e, usando (1.41), vem

$$\begin{aligned} T^{ab}\ x & \quad \frac{x^{a}}{x^{c}} \frac{x^{b}}{x^{d}} T^{cd}\ x \\ & \quad {}^{a}_{c} \quad u \ {}_{c}X^{a} \quad {}^{b}_{d} \quad u \ {}_{d}X^{b} \ T^{cd}\ x \\ & \quad T^{ab}\ x \quad {}_{c}X^{a} T^{cb}\ x \quad {}_{d}X^{b} T^{ad}\ x \quad u \quad O \quad u^{2} \ . \end{aligned} \qquad (\ 1.42\ )$$

Aplicando o teorema de Taylor até à primeira ordem, obtém-se

$$\begin{aligned} T^{ab}\ x & \quad T^{ab}\ x^{c} \quad uX^{c}\ x \\ & \quad T^{ab}\ x \quad uX^{c} \ {}_{c}T^{ab}\ x \ . \end{aligned} \qquad (\ 1.43\ )$$

Assim, a **derivada de Lie** de T^{ab} ao longo de X^{a}, denota-se por $L_{X}T^{ab}$ e define-se como

$$L_{X}T^{ab} \quad \lim_{u \quad 0} \frac{T^{ab}\ x \quad T^{ab}\ x}{u}. \qquad (\ 1.44\ )$$

Usando (1.42) e (1.43), vem que

$$L_{X}T^{ab} \quad X^{c} \ {}_{c}T^{ab} \quad T^{ac} \ {}_{c}X^{b} \quad T^{cb} \ {}_{c}X^{a}. \qquad (\ 1.45\ )$$

É possível introduzir um sistema de coordenadas tal que a curva que passa por P é dada por x^{1} variável e $x^{2}, x^{3}, ..., x^{n}$ constantes tal que

$$X^{a} \quad {}^{a}_{1} \quad 1, 0, 0, ..., 0 \qquad (\ 1.46\ )$$

ao longo dessa curva. A notação usada em (1.46) significa que a igualdade se verifica apenas num sistema particular de coordenadas. Então,

$$X \quad X^{a} \ {}_{a} \quad {}_{1},$$

e a equação (1.45) reduz-se a

$$L_{X}T^{ab} \quad {}_{1}T^{ab}, \qquad (\ 1.47\ )$$

o que significa que, neste sistema especial de coordenadas, a derivada de Lie é igual à derivada parcial.

Vejam-se algumas propriedades importantes da derivada de Lie ao longo de X que vêm da sua definição:

1. é **linear**; por exemplo

$$L_X \quad Y^a \quad Z^a \quad L_X Y^a \quad L_X Z^a, \qquad (1.48)$$

com e constantes.

2. é de Leibniz; i.e., satisfaz a regra para a derivada de um produto, por exemplo

$$L_X \; Y^a Z_{bc} \quad Y^a \; L_X Z_{bc} \quad L_X Y^a \; Z_{bc}. \qquad (1.49)$$

3. preserva o tipo dos tensores, i.e., a derivada de Lie de um tensor do tipo p,q é um tensor do tipo p,q .

4. comuta com a contracção, por exemplo

$${}^a_b L_X T^a_b \quad L_x T^a_a. \qquad (1.50)$$

5. a derivada de Lie de um campo escalar é dada por

$$L_X \quad X \quad X^a \;\; {}_a \qquad (1.51)$$

6. a derivada de Lie de um campo de vectores contravariantes Y^a é dada por

$$L_X Y^a \quad X, Y \;^a \quad X^b \; {}_b Y^a \quad Y^b \; {}_b X^a. \qquad (1.52)$$

7. a derivada de Lie de um campo de vectores covariantes Y_a é dada por

$$L_X Y_a \quad X^b \; {}_b Y_a \quad Y_b \; {}_a X^b. \qquad (1.53)$$

8. a derivada de Lie de um campo de tensores $T^{a\ldots}_{b\ldots}$ é dada por

$$L_X T^{a\ldots}_{b\ldots} \quad X^c \; {}_c T^{a\ldots}_{b\ldots} \quad T^{c\ldots}_{b\ldots} \; {}_c X^a \quad \ldots \quad T^{a\ldots}_{c\ldots} \; {}_b X^c \quad \ldots. \qquad (1.54)$$

1.2.10. Conexão Afim e Derivada Covariante de um Tensor

Considere-se um campo vectorial contravariante $X^i\ x$ definido num ponto Q de coordenadas $x^i \quad x^i$ na vizinhança de um ponto P de coordenadas x^i. Através da fórmula de Taylor, tem-se

$$X^i\ x^i \quad x^i \quad X^i\ x \quad x^j \frac{X^i}{x^j}. \tag{1.55}$$

Igualando o segundo termo da expressão anterior a $X^i\ x$, vem

$$X^i\ x \quad x^j \frac{X^i}{x^j} \quad X^i\ x \quad x \quad X^i\ x\ , \tag{1.56}$$

que não é um tensor, uma vez que envolve a diferença de dois tensores definidos em pontos diferentes. Para chegar ao conceito de derivada covariante, introduz-se um vector em Q *paralelo* a X^i no ponto P. Este vector paralelo difere de X^i por um valor $X^i\ x$.

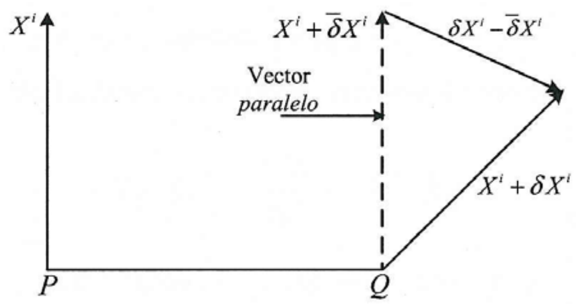

Figura 1.6. : Vector paralelo $X^i\ x \quad X^i$ no ponto Q.

$X^i\ x$ não é um tensor, mas o vector **diferença**

$$X^i\ x \quad X^i\ x \quad \left(X^i\ x \quad X^i\ x\right) \quad X^i\ x \quad X^i\ x \tag{1.57}$$

construir-se-á de forma a ter carácter tensorial. A forma mais simples será assumir que $X^i\ x$ é linear em X^i e x^i o que faz com que existam factores multiplicativos ${}^{\ i}_{jk}$ tal que

$$X^i\ x \quad {}^{\ i}_{jk} X^j\ x^k. \tag{1.58}$$

Define–se ${}_k X^i$ como sendo a derivada covariante de X^i dada pelo limite

$$\nabla_k X^i = \lim_{\delta x^k \to 0} \frac{1}{\delta x^k}\left\{X^i(x+\delta x) - \left[X^i(x) + \delta X^i(x)\right]\right\} \qquad (1.59)$$

que é a diferença entre o vector $X^i(Q)$ e o vector em Q paralelo ao vector $X^i(P)$ dividida pela diferença das coordenadas quando estas, no limite, tendem para zero. Usando as relações (1.55) e (1.58), obtém-se

$$\nabla_k X^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} X^j. \qquad (1.60)$$

Para que $\nabla_k X^i$ seja um tensor do tipo $(1,1)$, Γ^i_{jk} tem que transformar de acordo com

$$\Gamma'^i_{jk} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^s}{\partial x'^k}\Gamma^r_{ms} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}\frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^j \partial x'^k}. \qquad (1.61)$$

A presença do segundo termo de (1.61) mostra que Γ^i_{jk} não é um tensor.Qualquer quantidade Γ^i_{jk}, com uma lei de transformação (1.61) é chamada uma **conexão afim** ou, simplesmente, **conexão** ou **afinidade**. Uma variedade munida de uma conexão contínua é uma **variedade afim**.

Se se exigir que a derivada covariante satisfaça a regra de Leibniz, tem-se

$$\nabla_k X_i = \frac{\partial X_i}{\partial x^k} - \Gamma^i_{jk} X_j. \qquad (1.62)$$

A derivada de um tensor do tipo (p,q) vai ser do tipo $(p,q+1)$, i.e., tem um grau covariante extra. A expressão geral da derivação covariante para um tensor $T^{i\ldots}_{j\ldots}$ tem a forma

$$\nabla_k T^{i\ldots}_{j\ldots} = \frac{\partial T^{i\ldots}_{j\ldots}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{rk} T^{r\ldots}_{j\ldots} + \ldots - \Gamma^r_{jk} T^{i\ldots}_{r\ldots} - \ldots. \qquad (1.63)$$

Da lei de transformação (1.61), conclui-se que a soma de duas conexões não é uma conexão ou um tensor. No entanto, a diferença de duas conexões é um tensor do tipo $(1,2)$, uma vez que o termo não homogéneo desaparece. Por esta razão, a parte anti-simétrica de Γ^i_{jk},

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} \qquad (1.64)$$

é um tensor. Se este tensor for nulo, a conexão é simétrica, i.e.,

$${}^{i}_{jk} \qquad {}^{i}_{kj}. \qquad (1.65)$$

Na expressão da derivada de Lie de um tensor, todas as derivadas parciais podem ser substituídas pela derivada covariante. Por exemplo, no caso de um vector, tem-se

$$L_X Y^a \quad X^b \;{}_b Y^a \quad Y^b \;{}_b X^a \quad X^b \;{}_b Y^a \quad Y^b \;{}_b X^a.$$

1.2.11. Métrica

Um campo tensorial simétrico de ordem dois, $g_{ij}\; x\;$, define uma métrica. Uma variedade munida de uma métrica é chamada uma **variedade de Riemann**. A métrica pode ser usada para definir distâncias e comprimentos de vectores. A distância infinitesimal, ds, entre dois pontos vizinhos, x^i e $x^i \quad dx^i$, é definida por

$$ds^2 \quad g_{ij}\; x\; dx^i dx^j. \qquad (1.66)$$

Esta equação (1.66) é também conhecida por **elemento de linha**. O quadrado da distância (ou norma) de um vector contravariante X^i é definido por

$$X^2 \quad g_{ij}\; x\; X^i X^j. \qquad (1.67)$$

A métrica é **definida positiva** ou **definida negativa** se, para todos os vectores X, $X^2 \quad 0$ ou $X^2 \quad 0$, respectivamente. Não se verificando qualquer uma destas condições, a métrica diz-se **indefinida**.

O ângulo entre dois vectores X^i e Y^i, com $X^2 \quad 0$ e $Y^2 \quad 0$, é dado por

$$\cos X, Y \qquad \frac{g_{ij}X^iY^j}{|g_{kr}X^kY^r|^{\frac{1}{2}}\,|g_{ms}X^mY^s|^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.68}$$

Se

$$g_{ij}X^iY^j \qquad 0, \tag{1.69}$$

os vectores X^i e Y^i são ortogonais. Se a métrica for indefinida, existem vectores que são ortogonais em relação a si próprios que se chamam **vectores nulos**, i.e.,

$$g_{ij}X^iX^j \qquad 0. \tag{1.70}$$

O determinante da métrica é representado por

$$g \qquad \det g_{ij} \ . \tag{1.71}$$

A métrica é não-singular se $g \quad 0$ e, nesse caso, a inversa de g_{ij}, g^{ij} é dada por

$$g_{ij}g^{jk} \qquad {}^{k}_{i}. \tag{1.72}$$

De (1.72), verifica-se que g^{ij} é um tensor contravariante de ordem dois e chama-se **métrica contravariante**.

Através de g_{ij} e g^{ij}, é possível baixar ou subir os índices de tensores, usando as seguintes relações

$$T^{\dots\,\dots}_{\dots i\dots} \qquad g_{ij}T^{\dots j\dots}_{\dots\,\dots} \tag{1.73}$$

e

$$T^{\dots i\dots}_{\dots\,\dots} \qquad g^{ij}T^{\dots\,\dots}_{\dots j\dots}. \tag{1.74}$$

1.2.12. Conexão Métrica

Considere-se uma curva C representada pela equação paramétrica

$x^i = x^i(u)$. Dividindo a equação (1.66) pelo quadrado de du, obtém-se

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = g_{ij}\frac{dx^i}{du}\frac{dx^j}{du}. \qquad (1.75)$$

O intervalo s, entre dois pontos, P_1 e P_2 na curva C, é dado por

$$\begin{aligned} s &= \int_{P_1}^{P_2} ds \\ &= \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{du}du \\ &= \int_{P_1}^{P_2} \left(g_{ij}\frac{dx^i}{du}\frac{dx^j}{du}\right) du. \end{aligned} \qquad (1.76)$$

Define-se **métrica geodésica temporal** entre dois pontos P_1 e P_2 como sendo a curva que une esses dois pontos e cujo intervalo entre eles é um máximo, um mínimo ou um ponto de sela.

Derivando as equações para as geodésicas, as equações de Euler-Lagrange dão origem às equações diferenciais de segunda ordem

$$g_{ij}\frac{d^2x^j}{du^2} + [jk,i]\frac{dx^j}{du}\frac{dx^k}{du} = \left(\frac{d^2s}{du^2} \Big/ \frac{ds}{du}\right) g_{ij}\frac{dx^j}{du}, \qquad (1.77)$$

em que as quantidades definidas por $[jk,i]$ são os **símbolos de Christoffel de primeira espécie** e são definidos pelas derivadas da métrica através de

$$[jk,i] = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^k}g_{ij}\right]. \qquad (1.78)$$

Multiplicando por g^{ir} e usando (1.72), obtêm-se as equações

$$\frac{d^2x^i}{du^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}\frac{dx^j}{du}\frac{dx^k}{du} = \left(\frac{d^2s}{du^2} \Big/ \frac{ds}{du}\right)\frac{dx^i}{du}, \qquad (1.79)$$

em que $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ são os **símbolos de Christoffel de segunda espécie** definidos por

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = g^{ir}[jk,r]. \qquad (1.80)$$

Considere-se um parâmetro u linearmente relacionado com o intervalo s, i.e.,

$$u \quad s \tag{1.81}$$

em que e são constantes. Então, o segundo membro de (1.79) anula-se. No caso especial em que $u \quad s$, as equações para uma **métrica geodésica** são

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} \quad \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} \quad 0 \tag{1.82}$$

e

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} \quad 1, \tag{1.83}$$

assumindo-se que $ds \quad 0$.

Para métricas indefinidas, existem geodésicas para as quais a distância entre quaisquer dois pontos é nula. Essas geodésicas são as **geodésicas nulas**. Estas curvas podem ser parametrizadas por um parâmetro u - o **parâmetro afim** - de forma a que as equações dessas curvas sejam expressas por

$$\frac{d^2x^i}{du^2} \quad \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{du}\frac{dx^k}{du} \quad 0, \tag{1.84}$$

em que

$$g_{ij}\frac{dx^i}{du}\frac{dx^j}{du} \quad 0. \tag{1.85}$$

A última equação advém do facto de a distância entre dois pontos ser zero ou, de forma equivalente, o vector tangente ser nulo. Qualquer outro parâmetro afim está relacionado com u pela lei de transformação

$$u \quad u \quad . \tag{1.86}$$

Considerem-se as seguintes equações

$$
{}^{i}_{jk} \qquad \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \tag{1.87}
$$

e

$$
{}^{i}_{jk} \qquad \tfrac{1}{2} g^{ir} \Big[\frac{\quad}{x^{j}} \, g_{rk} \qquad \frac{\quad}{x^{k}} \, g_{rj} \qquad \frac{\quad}{x^{r}} \, g_{jk} \; \Big]. \tag{1.88}
$$

Deste último resultado, vem que a conexão é, necessariamente, simétrica, i.e., ${}^{i}_{jk} \quad {}^{i}_{kj}$, numa base de coordenadas.

Esta conexão construída a partir da métrica e das suas derivadas é a **conexão métrica**. As definições anteriores conduzem à identidade

$$
{}_{k} g_{ij} \quad 0. \tag{1.89}
$$

Um resultado importante é o seguinte:

Se ${}_{a}$ *representa a derivada covariante da conexão afim* ${}^{i}_{jk}$, *então a condição necessária e suficiente para que a derivada covariante da métrica seja identicamente nula é que a conexão seja a conexão métrica*.

1.2.13. Tensor de Curvatura

O **tensor de curvatura** ou **tensor de Riemann** é definido por

$$
R^{i}_{jkr} \qquad \frac{\quad}{x^{k}} \; {}^{i}_{jr} \qquad \frac{\quad}{x^{r}} \; {}^{i}_{jk} \qquad {}^{m}_{jk} \; {}^{i}_{mk} \qquad {}^{m}_{jk} \; {}^{i}_{mr} \tag{1.90}
$$

em que ${}^{i}_{jk}$ é a conexão métrica definida em (1.88). R^{i}_{jkr} depende da métrica e das suas primeiras e segundas derivadas, sendo anti-simétrico nos dois últimos pares de índices

$$
R^{i}_{jkr} \qquad R^{i}_{jrk}. \tag{1.91}
$$

Uma vez que a conexão é simétrica, obtém-se o resultado

$$R^{i}_{jkr} \quad R^{i}_{rjk} \quad R^{i}_{krj} \quad 0. \tag{1.92}$$

Baixando o índice contravariante, verifica-se que o tensor resultante é simétrico trocando os primeiro e último pares de índices, i.e.,

$$R_{ijkr} \quad R_{krij}. \tag{1.93}$$

Combinando esta equação com (1.91), verifica-se que o tensor que resultou de baixar os índices é anti-simétrico no primeiro par de índices

$$R_{ijkr} \quad R_{jikr}. \tag{1.94}$$

Assim, verifica-se que o tensor da curvatura satisfaz as seguintes relações

$$R_{ijkr} \quad R_{ijrk} \quad R_{jikr} \quad R_{krij} \tag{1.95}$$

$$R_{ijkr} \quad R_{irjk} \quad R_{ikrj} \quad 0. \tag{1.96}$$

A existência destas simetrias origina uma considerável redução no número de componentes independentes; para n dimensões, o número reduz-se de n^4 para $\frac{1}{12}n^2 \; n^2 \quad 1$. Demonstra-se ainda que o tensor de Riemann satisfaz um conjunto de identidades diferenciais, as **identidades de Bianchi**:

$$_{i}R_{rmjk} \quad _{k}R_{rmij} \quad _{j}R_{rmki} \quad 0. \tag{1.97}$$

O **tensor de Ricci** define-se pela contracção

$$R_{ij} \quad R^{k}_{ikj} \quad g^{kr}R_{rikj}, \tag{1.98}$$

que, por (1.93), é simétrico. Uma outra contracção define o **escalar de curvatura** ou **escalar de Ricci** R como sendo

$$R \quad g^{ij}R_{ij}. \tag{1.99}$$

Estes tensores podem usar-se para definir o **tensor de Einstein**

$$G_{ij} \quad R_{ij} \quad \tfrac{1}{2}g_{ij}R, \tag{1.100}$$

que é simétrico e, por (1.96), pode dizer-se que satisfaz as identidades de

Bianchi contraídas

$$\nabla_j G_i^j = 0. \quad (1.101)$$

1.2.14. Métrica Plana

Num ponto P de uma variedade, g_{ij} é uma matriz simétrica de números reais que pode reduzir-se a uma diagonal, em que os termos são $+1$ ou -1. Se existir um sistema de coordenadas, no qual a métrica pode ser reduzida a uma forma diagonal com ± 1 em toda a variedade, a **métrica** diz-se **plana**. Demonstra-se ainda que, se $R^i_{jkl} = 0$, é possível encontrar um sistema de coordenadas, no qual as componentes da métrica são constantes ao longo do espaço.

Um resultado importante refere que a condição necessária e suficiente para que numa variedade a conexão seja plana é que o tensor de Riemann seja nulo.

Considere-se um sistema onde a métrica é uma diagonal com elementos ± 1. Como a métrica é constante em toda a variedade, as suas derivadas parciais anulam-se e, em consequência de (1.88), a conexão métrica Γ^i_{jk} também se anula. Assim, o tensor de Riemann anula-se também.

Pelo resultado referido anteriormente, se o tensor de Riemann se anula, então existe um sistema de coordenadas em que a conexão também se anula. Como esta conexão é a conexão métrica, por (1.89), tem-se

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} - \Gamma^r_{ik} g_{rj} - \Gamma^r_{jk} g_{ir} = 0, \quad (1.102)$$

de onde se obtém

$$\overline{}_{x^k}\, g_{ij} \qquad {}^{r}_{ik}g_{rj} \qquad {}^{r}_{jk}g_{ir}, \qquad (1.103)$$

que implica que

$$\overline{}_{x^k}\, g_{ij} \quad 0. \qquad (1.104)$$

A métrica é, então, constante em toda a variedade, podendo ser transformada numa diagonal de elementos 1.

1.2.15. Densidades Tensoriais

Uma densidade tensorial de peso W que, por convenção, se representa por $\mathcal{I}^{a...}_{b...}$, transforma como um tensor, excepto se a potência de ordem W do Jacobiano - $J \quad \left|\frac{x^a}{x^b}\right|$ aparece como um factor, i.e.,

$$\mathcal{I}^{a...}_{b...} \quad J^W \frac{x^a}{x^c} ... \frac{x^d}{x^b} ... \mathcal{I}^{c...}_{d...} \qquad (1.105)$$

Então, com algumas modificações, podem combinar-se densidades tensoriais da mesma forma que se faz com tensores. Uma excepção, que deriva de (1.105), é que o produto de duas densidades tensoriais de pesos W_1 e W_2 é uma densidade tensorial de peso $W_1 \quad W_2$. Há alguma arbitrariedade na definição da derivada covariante de uma densidade tensorial, mas dir-se-á que, se $\mathcal{I}^{a...}_{b...}$ é uma densidade tensorial de peso W, então

$${}_{c}\mathcal{I}^{a...}_{b...} \quad \text{termos usuais se } \mathcal{I}^{a...}_{b...} \text{ for um tensor} \quad W \ {}^{d}_{dc}\mathcal{I}^{a...}_{b...}. \qquad (1.106)$$

Por exemplo, a derivada covariante de uma densidade vectorial de peso W é

$${}_{c}\mathcal{I}^{a} \qquad {}_{c}\mathcal{I}^{a} \qquad {}^{a}_{bc}\mathcal{I}^{b} \quad W \ {}^{b}_{bc}\mathcal{I}^{a}. \qquad (1.107)$$

No caso especial em que $W = 1$ e $c = a$, obtém-se o resultado (importante)

$$\nabla_a \mathcal{I}^a = \partial_a \mathcal{I}^a, \qquad (1.108)$$

que significa que a **divergência covariante** de uma densidade vectorial de peso 1 é idêntica à sua divergência usual.

1.2.16. O símbolo de Levi-Civita

Introduzir-se-á uma quantidade que é uma generalização do símbolo de Kronecker, δ^a_b, e é uma densidade tensorial. O símbolo de **Levi-Civita**, ε^{abcd}, é uma densidade tensorial de peso 1 e contravariante de ordem 4, cujos valores, em qualquer sistema de coordenadas, são $+1$ ou -1 se $abcd$ for uma permutação ímpar ou par de 0123, respectivamente, e zero nos outros casos.

De modo semelhante, define-se a versão covariante ε_{abcd} que tem peso -1. Poderá ser usado, em particular, para formar o determinante de uma densidade de segunda ordem, i.e.,

$$\det \mathcal{I}^{ab} = \frac{1}{4!}\varepsilon_{abcd}\,\varepsilon_{efgh}\mathcal{I}^{ae}\mathcal{I}^{bf}\mathcal{I}^{cg}\mathcal{I}^{dh}. \qquad (1.109)$$

Assumindo que é diferente de zero, poder-se-á também usar para construir o inverso de um tensor de segunda ordem. As derivadas covariantes tanto de ε^{abcd} como de ε_{abcd} anulam-se.

1.2.17. O determinante da métrica

Se se tiver uma variedade de Riemann com métrica g_{ab}, ela transforma da seguinte forma

$$g_{ab}\ x \qquad \frac{x^c}{x^a}\frac{x^d}{x^b} g_{cd}\ x \ , \tag{1.110}$$

e, tomando os determinantes, tem-se

$$g \qquad J^2 g. \tag{1.111}$$

Assim, o determinante da métrica, g, é uma densidade escalar de peso 2. Poder-se-á, também, trabalhar com métricas de assinatura negativa, pelo que, a última equação é equivalente a

$$g \qquad J^2 \quad g \ . \tag{1.112}$$

Uma vez que todos os termos são, desta feita, positivos, é possível calcular as raízes quadradas, obtendo-se

$$g^{\frac{1}{2}} \qquad J \quad g^{\frac{1}{2}} \tag{1.113}$$

e $g^{\frac{1}{2}}$ é uma densidade escalar de peso 1. Esta quantidade terá um papel importante na integração. Dado qualquer tensor $T^{a\ldots}_{b\ldots}$ pode formar-se o produto $g^{\frac{1}{2}}T^{a\ldots}_{b\ldots}$ que é uma densidade tensorial de peso 1. De (1.108), pode dizer-se que, para qualquer vector T^a,

$$_a\big[\ g^{\frac{1}{2}}T^a\big] \qquad _a\big[\ g^{\frac{1}{2}}T^a\big]. \tag{1.114}$$

Em qualquer ponto, as métricas covariantes e contravariantes são matrizes simétricas que são inversas uma da outra

$$g_{ab}g^{bc} \qquad {}^{c}_{a}. \tag{1.115}$$

Considere-se o caso geral de encontrar a derivada do determinante de uma matriz cujos elementos são funções das coordenadas. Considere-se qualquer matriz quadrada $A \quad a_{ij}$. A sua inversa, b^{ij} , é definida por

$$b^{ij} \qquad \frac{1}{a} A^{ij} \qquad \frac{1}{a} A^{ji} \ , \tag{1.116}$$

onde a é o determinante de A, A^{ij} é o cofactor de a_{ij} e a linha representa a transposta. Fixe-se i e expanda-se o determinante a na linha i. Então,

$$a = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A^{ij}. \qquad (1.117)$$

Derivando parcialmente em ordem a a_{ij} ambos os lados da igualdade anterior, obtém-se

$$\frac{\partial a}{\partial a_{ij}} = A^{ij}, \qquad (1.118)$$

uma vez que a_{ij} não aparece em qualquer dos cofactores A^{ij} (com i fixo, j varia de 1 a n). Repetindo o processo para cada valor de i, como i varia de 1 a n, verifica-se que a fórmula (1.118) é generalizada. Suponha-se que a_{ij} são funções das coordenadas x^k. Então, o determinante é um funcional de a_{ij} que, por sua vez, são funções de x^k, i.e.,

$$a = a\left(a_{ij}\left(x^k\right)\right). \qquad (1.119)$$

Derivando (1.119) parcialmente em ordem a x^k, usando a regra da cadeia, (1.116) e (1.118), vem que

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial x^k} &= \frac{\partial a}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} \\ &= A^{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} \\ &= a b^{ji} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}. \qquad (1.120)\end{aligned}$$

Aplicando este resultado ao determinante da métrica, g, e relembrando que g^{ab} é simétrica, obtém-se a equação

$$\partial_c g = g g^{ab} \partial_c g_{ab}. \qquad (1.121)$$

Deste resultado e de (1.103), vem que

$$\begin{aligned}\partial_c g &= g g^{ab} \left(\Gamma^d_{ac} g_{db} + \Gamma^d_{bc} g_{ad} \right) \\ &= g \left(\delta^a_d \Gamma^d_{ac} + \delta^b_d \Gamma^d_{bc} \right)\end{aligned}$$

$$2g \; {}^{a}_{ac}. \qquad (1.122)$$

Usando (1.106), a derivada covariante de g, que é uma densidade escalar de peso 2, tem-se

$$_{c}g \quad _{c}g \quad 2g \; {}^{a}_{ac}, \qquad (1.123)$$

e, por (1.122),

$$_{c}g \quad 0. \qquad (1.124)$$

De forma semelhante, de (1.122), vem

$$_{c} \quad g^{\frac{1}{2}} \quad g^{\frac{1}{2}} \; {}^{a}_{ac} \quad 0, \qquad (1.125)$$

que, por (1.106),

$$_{c} \quad g^{\frac{1}{2}} \quad 0. \qquad (1.126)$$

Em particular, para qualquer tensor $T^{a\ldots}_{b\ldots}$, obtém-se a identidade

$$_{c}\left[\quad g^{\frac{1}{2}} T^{a\ldots}_{b\ldots} \right] \quad g^{\frac{1}{2}} \quad {}_{c}T^{a\ldots}_{b\ldots} \; . \qquad (1.127)$$

1.2.18. Integrais e Teorema de Stokes

Ao contrário dos tensores em geral, pode adicionar-se um campo escalar avaliado em dois pontos diferentes, por exemplo, x_1 e x_2, e o resultado é ainda um escalar, uma vez que sob uma transformação de coordenadas, a soma transforma como

$$x_1 \quad x_2 \quad x_1 \quad x_2 \; . \qquad (1.128)$$

Então, é possível integrar um campo escalar numa região de dimensão n numa variedade M. No entanto, o elemento de volume d não é um escalar, mas uma densidade escalar de peso 1. Vem, então, que se pode integrar uma densidade escalar de peso 1 numa região ,

$$d \quad , \tag{1.129}$$

uma vez que em cada ponto d é um escalar podendo ser adicionados por (1.128). Afirmações análogas podem fazer-se sobre integração em curvas, superfícies e hipersuperfícies.

Considere-se um subespaço de M de dimensão m cuja equação paramétrica é

$$x^a \quad x^a \ u^i \qquad i \quad 1,2,...,m \ . \tag{1.130}$$

O elemento de volume deste subespaço é definido por

$$d \ ^{a_1a_2...a_m} \qquad {}^{a_1a_2...a_m}_{b_1b_2...b_m} \frac{x^{b_1}}{u_1}\frac{x^{b_2}}{u_2}...\frac{x^{b_m}}{u_m} du^1 du^2 ... du^m. \tag{1.131}$$

Este elemento é um tensor contravariante de ordem m sob uma transformação de coordenadas e comporta-se como um escalar sob uma mudança arbitrária de parâmetros. Então, se $X_{a_1a_2...a_m}$ é um tensor contravariante de ordem m, então $X_{a_1a_2...a_m} d \ ^{a_1a_2...a_m}$ é um escalar sob transformações de coordenadas e de parâmetro, podendo formar-se o integral

$$\ _{m} X_{a_1a_2...a_m} d \ ^{a_1a_2...a_m} \tag{1.132}$$

num região $\ _m$ do subespaço. As derivadas das coordenadas $d_i x^a$ correspondendo a cada parâmetro u_i são definidas por

$$d_i x^a \qquad \frac{x^a}{u^i} du^i \qquad \text{(não há soma em } i\text{).} \tag{1.133}$$

Assim, o teorema de Stokes num subespaço $\ _m$ de dimensão m, cuja fronteira é o subespaço de dimensão $m \quad 1$, $\ _m \qquad _{m \ 1}$ é dado por

$$\ _{m} X_{a_1a_2...a_m \ 1} d \ ^{a_1a_2...a_m \ 1} \qquad \ _{m} \ _{a_m} X_{a_1a_2...a_m \ 1} d \ ^{a_1a_2...a_m}. \tag{1.134}$$

Será de particular interesse o caso especial de uma região de dimensão 4 de uma variedade M de dimensão 4, onde a fronteira de é a hipersuperfície . O teorema de Stokes dá, então, lugar ao teorema da divergência ou teorema de Gauss para uma densidade vectorial contravariante $\mathcal{I}^a$ de peso 1, que se escreve como

$$\mathcal{I}^a dS_a \qquad \mathcal{I}^a_{,a} d \quad , \tag{1.135}$$

onde

$$dS_a \quad \tfrac{1}{3!} \ {}_{abcd} d \ {}^{bcd} \tag{1.136}$$

e

$$d \qquad \tfrac{1}{4!} \ {}_{abcd} d \ {}^{abcd}. \tag{1.137}$$

Se se usarem as coordenadas x^a como parâmetros, d escreve-se como d^4x onde

$$d^4x \quad dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \tag{1.138}$$

e

$$dS_a \qquad dx^1dx^2dx^3, dx^0dx^2dx^3, dx^0dx^1dx^3, dx^0dx^1dx^2 \ . \tag{1.139}$$

Por (1.137), d^4x é uma densidade escalar de peso 1.

1.2.19. Equações de Euler-Lagrange

Um funcional pode ser definido como a correspondência entre um número real e uma função de determinada classe. Assim, um funcional é uma espécie de função onde a variável independente é ela mesma uma função. Um dos problemas básicos no cálculo de variações é o de encontrar valores estacionários da acção I definida por

$$I \ y \qquad {}_{x_1}^{x_2} L \ y, y \ , x \ dx, \tag{1.140}$$

onde L é um funcional da variável dinâmica y, da sua derivada $y \quad dy/dx$ e da coordenada x, a que se chama Lagrangeano. O problema generaliza-se facilmente. De forma a resolver o problema, será necessário usar o resultado:

Se $\int_{x_1}^{x_2} \; x \quad x \, dx \quad 0$, *onde* x *é contínua e* x *é uma função arbitrária*, *com derivadas de segunda ordem*, *que se anula na fronteira*, *i.e.*,

$x_1 \qquad x_2 \quad 0$, *então* $x \quad 0$.

Voltando a (1.140), assume-se que L admite segundas derivada em ordem às suas três variáveis. Varie-se y numa pequena quantidade arbitrária, escrevendo

$$y \quad y \qquad x \;, \tag{1.141}$$

onde é pequeno e x satisfaz as condições do resultado referido anteriormente, i.e., tem segundas derivadas e anula-se em x_1 e x_2. Define-se a variação de y por

$$y \quad y \quad y \qquad x \;. \tag{1.142}$$

Diferenciando (1.141) em ordem a x, usando a notação linha, obtém-se

$$y \qquad y \qquad , \tag{1.143}$$

pelo que

$$y \qquad y \qquad y \qquad\qquad y \;, \tag{1.144}$$

de onde se vê que e d/dx actuando em y comutam. Então, aplicando o teorema de Taylor até primeira ordem em , tem-se

$$\begin{aligned} I[y] \quad & I\,y \quad y \\ & \int_{x_1}^{x_2} L\; y \qquad , y \qquad , x \; dx \\ & \int_{x_1}^{x_2} \Big(L\; y, y\,, x \qquad \frac{L}{y} \qquad \frac{L}{y} \qquad \Big) dx \end{aligned} \tag{1.145}$$

Definindo a quantidade

$$I \quad I\,y \quad y \quad I\,y \;, \tag{1.146}$$

obtém-se

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y'\right)dx. \qquad (1.147)$$

O último termo de (1.147) pode ser integrado por partes, ficando

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial L}{\partial y'}\delta y'\, dx = \left[\frac{\partial L}{\partial y'}\delta y\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\delta y\, dx. \qquad (1.148)$$

O termo nos parênteses rectos anula-se uma vez que $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ e, então,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\right]\delta y\, dx. \qquad (1.149)$$

Se $y = y(x)$ é uma curva estacionária, então δI anula-se na primeira ordem e, assim, usando o resultado referido atrás, y satisfaz as equações de Euler-Lagrange, i.e.,

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0. \qquad (1.150)$$

Usando uma outra notação, define-se a derivada variacional, a derivada funcional ou a derivada de Euler-Lagrange de L por

$$\frac{\delta L}{\delta y} \equiv \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right), \qquad (1.151)$$

pelo que (1.149) pode escrever-se como

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\delta L}{\delta y}\delta y dx. \qquad (1.152)$$

Neste formalismo, o princípio estacionário requer que

$$\delta I = 0 \qquad (1.153)$$

para δy arbitrário, que conduz, novamente pelos resultados apresentados anteriormente (1.150) e (1.151), à equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\delta L}{\delta y} = 0. \qquad (1.154)$$

O argumento pode ser generalizado para n variáveis dinâmicas cada uma sendo função de uma variável x, i.e., $y_1(x),...,y_n(x)$. Então, a acção é definida, em termos do Lagrangeano, por

$$I\; y_1,...,y_n \qquad {}_{x_1}^{x_2} L\; y_1,...,y_n,y_1,...,y_n,x\; dx \tag{1.155}$$

e as variações

$$y_i \quad y_i \quad y_i \qquad y_i \qquad\qquad i \quad 1,2,...,n\;, \tag{1.156}$$

onde

$$y_i \qquad {}_i\; x\;, \qquad\qquad {}_i\; x_1 \qquad {}_i\; x_2 \quad 0, \tag{1.157}$$

conduz a

$$I \qquad {}_{x_1}^{x_2} \frac{L}{y_i}\; y_i dx \qquad \text{(somando em } i\text{)}, \tag{1.158}$$

com

$$\frac{L}{y_i} \qquad \frac{L}{y_i} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{L}{y_i}\right). \tag{1.159}$$

O princípio de acção estacionária, $I \quad 0$, para variações independentes arbitrárias, y_i, levam às equações de Euler-Lagrange

$$\frac{L}{y_i} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{L}{y_i}\right) \quad 0 \qquad\qquad i \quad 1,2,...,n\;. \tag{1.160}$$

Uma generalização para um sistema de m variáveis dinâmicas $y_A\; x$, $A \quad 1,2,...,m$, definido numa variedade M de dimensão n, começa por definir a acção

$$I \qquad \mathcal{L}\; y_A, y_{A,b}, x^a\; d\;, \tag{1.161}$$

onde a vírgula denota a derivada parcial, i.e., $y_{A,b} \quad {}_b y_A$, e o Lagrangeano $\mathcal{L}$ é uma densidade escalar de peso 1 conduzindo às equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\mathcal{L}}{y_A} \quad \frac{\mathcal{L}}{y_A} \quad \left(\frac{\mathcal{L}}{y_{A,b}}\right)_{,b} \quad 0 \qquad\qquad A \quad 1,2,...,m\;. \tag{1.162}$$

A importância do método do princípio variacional vem de que grande parte das teorias físicas (se não todas) podem ser formuladas especificando um Lagrangeano conveniente. As equações de Euler-Lagrange podem ser, assim, calculadas constituindo as equações de campo da teoria.

1.3. A Relatividade Restrita: os axiomas de Einstein

Antes de passar à Teoria da Relatividade restrita (re)vejam-se algumas ideias básicas da Teoria Newtoniana. A primeira lei de Newton afirma que um corpo que não esteja sob a acção de quaisquer forças tem movimento rectilíneo e velocidade uniforme. A segunda lei descreve o que acontece se a velocidade de um objecto variar, considerando-se que, se isso acontecer, é porque se verifica a acção de alguma **força**. A resistência de um corpo ao movimento, ou mesmo à mudança do estado de movimento ou de repouso, é chamada **inércia**. Para qualquer corpo, pode medir-se, pelo menos num dado instante, a sua inércia. A essa medida dá-se o nome de **massa** m (nesse instante). Para um corpo que se move com velocidade , define-se o seu **momento linear** p como o produto da sua massa pela sua velocidade. Então, a segunda lei de Newton afirma que a força que actua num corpo é equivalente à taxa de variação do momento linear. A terceira lei é menos geral, referindo-se a uma classe restrita de forças - as **forças internas** - nomeadamente as forças que actuam num corpo devido à existência de outros corpos. A terceira lei afirma que a força que actua num corpo devido à influência de outros corpos - a **acção** - é igual e oposta à força que actua nos outros corpos por influência do primeiro - a **reacção**.

A Relatividade Restrita refere-se ao comportamento de corpos materiais e raios de luz na ausência de forças gravitacionais. No entanto, Newton afirma que uma distribuição de matéria de densidade de massa $\rho(x,y,z,t)$ origina um potencial gravitacional ϕ que satisfaz a **equação de Poisson**

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \qquad (1.163)$$

em pontos da distribuição, em que o operador Laplaciano ∇^2 é dado em coordenadas cartesianas por

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (1.164)$$

Em pontos exteriores à distribuição, reduz-se à **equação de Laplace**

$$\nabla^2\phi = 0. \qquad (1.165)$$

Como já foi referido, os referenciais inerciais são referenciais nos quais as relações Euclidianas são válidas e nos quais existe um tempo universal em que partículas livres permanecem em repouso ou em movimento rectilíneo uniforme (obedecendo à primeira lei de Newton).

Por definição, partículas livres colocadas sem velocidade em pontos fixos num referencial inercial permanecerão nesses pontos. Assim, será possível visuallizar um referencial deste tipo como um conjunto de partículas livres em repouso umas em relação às outras, sendo a distância entre elas determinada por escalas rígidas, satisfazendo os axiomas de Euclides. No referencial, as partículas são portadoras de relógios que indicam o *tempo universal* ao longo do referencial.

A Relatividade Restrita associa-se a uma física ideal que se refere a um conjunto de referenciais livres de qualquer acção gravítica - os referenciais inerciais. Na mecânica clássica, a gravidade era vista como algo que não afectava o resto da física. Assim, Newton vê um conjunto de estrelas como um referencial inercial em relação ao qual, partículas livres, apesar da gravidade, se movem uniformemente (esta ideia é contrariada, posteriormente, com a Teoria Geral da Relatividade).

1.3.1 Princípios

Na Relatividade Restrita, o *princípio restrito* generaliza a teoria Newtoniana ao afirmar que

Todos os observadores inerciais são iguais no que se refere a experiências dinâmicas.

Este princípio significa que, se um determinado observador inercial conduzir uma experiência dinâmica e chegar à descoberta de uma lei física, então, qualquer outro observador inercial ao realizar a mesma experiência terá que chegar, necessariamente, à mesma descoberta, i.e., numa transformação de Galileu, as leis têm que permanecer invariantes.

Com este princípio torna-se impossível afirmar, ao realizar experiências dinâmicas, se um corpo está em repouso absoluto ou em movimento uniforme. Na Teoria Newtoniana não é possível determinar a posição **absoluta** de um acontecimento, mas sim da sua posição **relativa** em relação a um outro. O mesmo acontece com a velocidade, só é possível falar da velocidade de um corpo em relação a outro. Assim, posição e velocidade são conceitos **relativos**.

Mas, Einstein compreendeu que não se podia falar de experiências puramente dinâmicas. Quanto mais se analisa determinada experiência, mais é possível verificar a envolvência de todos os ramos da física. Então, Einstein retira a restrição da dinâmica do princípio e enuncia o primeiro postulado.

Postulado I - Princípio da Relatividade Restrita:

Todos os observadores inerciais são equivalentes.

Este princípio não é uma negação da Teoria Newtoniana, constituindo um complemento ao princípio da relatividade da Mecânica Clássica.

1.3.2. A constância da Velocidade da Luz

Uma das imposições das equações de Maxwell é a de a propagação da luz, no vácuo, ser igual a c (com c $3 \times 10^8 m/s$), pelo menos relativamente a um sistema inercial definido S. De acordo com o princípio da Relatividade Restrita, deve admitir-se como válido, em qualquer sistema inercial, o *princípio da constância da velocidade da luz*.

O facto de a velocidade da luz ser independente da fonte que a emite é assumido no tempo de Einstein, que formula o seu segundo postulado:

Postulado II - A constância da velocidade da luz:

A velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais.

1.3.3. Espaço-tempo de Minkowski

O **espaço-tempo** de Minkowski ou, simplesmente, o espaço plano é caracterizado por ser uma variedade de dimensão quatro munida de uma métrica plana de traço 2. Então, por definição e como a métrica é plana, existe um sistema de coordenadas, no qual a métrica é diagonal com elementos 1, que cobre toda a variedade. A este sistema de coordenadas chama-se **sistema de coordenadas de Minkowski** e escreve-se da seguinte forma

$$x \qquad x^0,x^1,x^2,x^3 \qquad t,x,y,z \;. \tag{1.166}$$

Adopta-se a convenção de sinal em que o **elemento linha de Minkowski** se escreve como

$$ds^2 \qquad c^2dt^2 \quad dx^2 \quad dy^2 \quad dz^2 \tag{1.167}$$

e, em unidades relativistas, considerando $c \quad 1$, fica

$$ds^2 \qquad dt^2 \quad dx^2 \quad dy^2 \quad dz^2. \tag{1.168}$$

Na forma tensorial, escreve-se

$$ds^2 \qquad dx \; dx \;, \tag{1.170}$$

em que é a **métrica de Minkowski**, que, na forma matricial, se escreve

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad diag \quad 1,1,1,1 \;. \tag{1.171}$$

Em coordenadas de Minkowski, a métrica é constante e, assim, a conexão ${}^{i}_{jk}$ desaparece neste sistema de coordenadas, pelo que o tensor de Riemann é nulo.

1.3.4. O Cone de Luz

No espaço-tempo de Minkowski, a norma de um vector é definida por

$$X^2 = g_{ij}X^iX^j = X_iX^i. \qquad (1.172)$$

Um vector terá a seguinte classificação:

temporal se $X^2 > 0$,

espacial se $X^2 < 0$,

nulo se $X^2 = 0$.

Dois vectores são ortogonais se o seu produto interno for zero, i.e.

$$g_{ij}X^iY^i = 0 \qquad (1.173)$$

e daqui se deduz que um vector nulo é ortogonal a si próprio.

O conjunto de todos os vectores nulos num ponto P numa variedade de Minkowski forma um cone duplo a que se chama **cone duplo** ou **cone de luz**. Em coordenadas de Minkowski, os vectores nulos X^i no ponto P satisfazem a relação

$$\eta_{ij}X^iX^j = 0, \qquad (1.174)$$

ou seja,

$$\left(X^0\right)^2 - \left(X^1\right)^2 - \left(X^2\right)^2 - \left(X^3\right)^2 = 0, \qquad (1.175)$$

que é a equação de um cone duplo. Se se definir um vector temporal T^i em coordenadas de Minkowski por $T^i = (1, 0, 0, 0)$, então, um vector temporal ou nulo X^i diz-se que

aponta para o futuro se $\eta_{ij}X^iT^j > 0$,

aponta para o passado se $\eta_{ij}X^iT^j < 0$.

Os vectores que apontam para o futuro encontram-se sobre ou dentro de uma região do cone chamada futuro e os que apontam para o passado estão sobre ou dentro de uma região chamada passado.

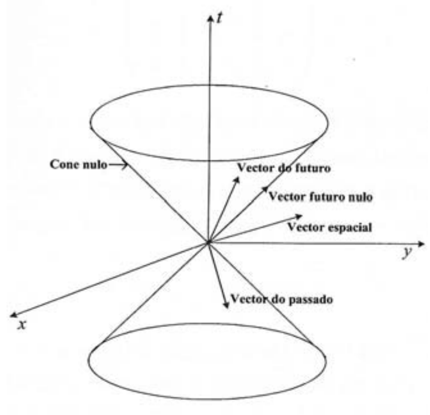

Figura 1.7. : Cone nulo sem a terceira dimensão z.

1.3.5. Transformações de Lorentz

1.3.5.1. Derivação *standard* das Transformações de Lorentz

Considerem-se dois referenciais S e S e que S se move uniformemente ao longo do semi-eixo positivo OX com velocidade (recordar fig. 1.2). As coordenadas cartesianas medidas em S são x, y, z e t é o tempo medido por um relógio em repouso no referencial S. Do mesmo modo (x, y, z) e t são, respectivamente, as coordenadas espaciais e temporal medidas em S. Contrariamente à Mecânica Clássica, não se assume que o tempo é absoluto, i.e., $t \quad t$. A relação entre as coordenadas em S e S pode ser escrita de uma forma matricial por

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.176}$$

em que L é uma matriz 4 x 4 a que se chama **matriz de Lorentz** e que representa uma transformação de Lorentz cujas quantidades apenas dependem, neste caso, da velocidade de separação . Assuma-se que o espaço é igual em todas as direcções (isotrópico) o que leva a que as trasformações para y e z sejam

$$y \quad y \qquad \text{e} \qquad z \quad z. \tag{1.177}$$

No instante $t \quad t \quad 0$, as origens dos dois referenciais coincidem. Considere-se que um feixe de luz é emitido nesse instante. De acordo com S, o feixe de luz move-se de uma forma radial, afastando-se de S com velocidade c, constituindo uma esfera de raio ct. Se se definir a quantidade I por

$$I \; t,x,y,z \qquad c^2t^2 \quad x^2 \quad y^2 \quad z^2 \tag{1.178}$$

então, todos os acontecimentos que descrevem esta esfera têm que satisfazer a condição $I \quad 0$. Pelo segundo postulado de Einstein, S também verá o feixe a deslocar-se de uma forma esférica com velocidade c. Então, se se definir I por

$$I \left(t,x,y,z\right) \qquad c^2 \; t^2 \quad x^2 \quad y^2 \quad z^2 \tag{1.179}$$

conclui-se que

$$I \quad 0 \quad I \quad 0. \tag{1.180}$$

Há, então, necessidade de encontrar uma transformação que respeite (1.180). Pela definição de referenciais inerciais, esta transformação deverá ser linear o que implica que $I \quad kI$ e $I \quad k\, I$. Destas duas equações, vem que $k^2 \quad 1$. Assim, obtém-se $k \quad 1$, uma vez que $k \quad 1$ é impossível, pois, no limite, quando $\quad 0$, tem-se que $I \quad I$.

Substituindo, então, k por 1 em $I \quad k\, I$, obtém-se

$$c^2t^2 \quad x^2 \quad y^2 \quad z^2 \qquad c^2\, t^2 \quad x^2 \quad y^2 \quad z^2 \qquad (1.181)$$

e, substituindo (1.177) nesta última expressão resulta

$$c^2t^2 \quad x^2 \qquad c^2\, t^2 \quad x^2\, . \qquad (1.182)$$

Introduzindo as coordenadas imagiárias definidas por

$$T \quad ict \qquad \text{e} \qquad T \quad ic\, t \qquad (1.183)$$

a expressão (1.182) fica

$$T^2 \quad x^2 \quad T^2 \quad x^2\, . \qquad (1.184)$$

Num espaço bidimensional x, T, $T^2 \quad x^2$ representa o quadrado da distância de um ponto P à origem que se mantém invariante durante uma rotação no referido espaço

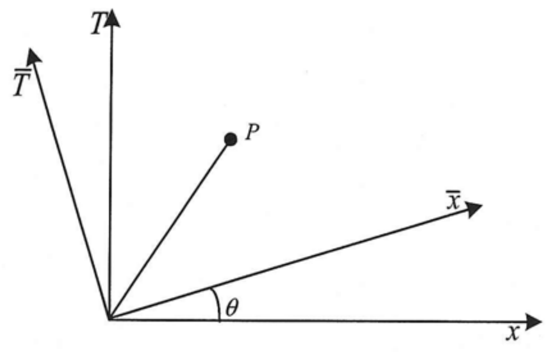

Figura 1.8. : Rotação no espaço x, T de valor .

Definindo-se o ângulo de rotação por , a rotação será dada por

$$x \quad x\cos \qquad Tsen \qquad (1.185)$$

$$T \quad x sen \quad T\cos \; . \qquad (1.186)$$

S vê S a mover-se ao longo do seu eixo positivo x com uma velocidade , pelo que $x \quad t \quad T/ic$ e, substituindo em (1.185), obtém-se

$$tg \quad \tfrac{i}{c}\, . \qquad (1.187)$$

Pode obter-se uma expressão para $\cos$, a partir de

$$\cos \quad \frac{1}{\sec}$$

$$\frac{1}{1 \; tg^2 \;\; \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\left(1 \;\; \frac{2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\, . \qquad (1.188)$$

Fazendo

$$\frac{1}{\left(1 \;\; \frac{2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (1.189)$$

a expressão (1.185) fica

$$x \quad x \quad t \qquad (1.190)$$

e a expressão (1.186)

$$T \quad x\tfrac{i}{c} \quad ict \qquad (1.191)$$

pelo que

$$t \quad \left(t \quad \tfrac{x}{c^2}\right). \qquad (1.192)$$

Assim, deriva-se uma transformação de Lorentz chamada *boost* dada por

$$t \quad \left(t \quad \tfrac{x}{c^2}\right) \qquad (1.193)$$

$$x \quad x \quad t \qquad (1.194)$$

$$y \quad y \qquad (1.195)$$

$$z \quad z \qquad (1.196)$$

A $\frac{1}{\sqrt{1 \;\; \frac{2}{c^2}}}$ dá-se o nome de **factor de Lorentz**. Se 0, então 1.

Se c, pode considerar-se 1 e a transformação de Lorentz fica

$$t \quad t$$

$$x \quad x \quad t$$

$$y \quad y$$

$$z \quad z$$

que correspondem à transformação de Galileu (translação).

1.3.5.2. O Grupo de Lorentz

Seja M o espaço-tempo de Minkowski. Uma transformação de Lorentz é uma função linear $L : M \quad M$ que, para quaisquer $x, y \quad M$, satisfaz a condição

$$L\ x\ .L\ y \quad x\ .\ y \qquad (1.197)$$

Se L^i_j forem os coeficientes da matriz L (com $i, j \quad 0,1,2,3$), tem-se

$$L\ x \quad L^i_j x^j \quad x^i\ . \qquad (1.198)$$

As transformações de Lorentz são, então, definidas como um conjunto de transformações do tipo

$$x^i \quad x^i \quad L^i_j x^j \qquad (1.199)$$

das coordenadas de Minkowski que deixam a métrica de Minkowski invariante, i.e.,

$$L^i_k L^j_r \ {}_{ij} \quad {}_{kr} \qquad (1.200)$$

e

$$L\ x\ .L\ y \quad {}_{ij} L^i_k x^k L^j_r y^r \quad L^T\ L\ {}_{kr} x^k y^r \qquad (1.201)$$

em que L^T representa a matriz transposta de L. Então,

$$L\,x\;.L\,y \quad x\;.\;y \quad L^T\;L\;{}_{kr}x^k y^r \qquad {}_{kr}x^k y^r \tag{1.202}$$

quaisquer que sejam $x{,}y \quad M$. Conclui-se que uma matriz de Lorentz, L satisfaz a condição

$$L^T\;L \qquad . \tag{1.203}$$

Será impostante referir que se L for uma matriz de Lorentz, então L^T também o será.

Por (1.203), tem-se que $\det L \qquad 1$. Se $x \quad y$ em (1.197), então x é um vector temporal se e só se $L\,x$ é um vector temporal; x é um vector espacial se e só se $L\,x$ é um vector espacial; e, pela propriedade da não-degenerescência do produto interno, x é um vector nulo se e só se $L\,x$ for um vector nulo.

O grupo das transformações de Lorentz em M formam um grupo a que se dá o nome **grupo de Lorentz** que se representa por $\mathcal{L}$.O elemento identidade deste grupo é $\;{}^{i}_{j}$ e o elemento inverso é dado pela matriz inversa. A matriz L^i_j é invertível, pois, de (1.200), vem

$$\det L \;^2 \quad 1 \qquad \det L \qquad 1$$

pelo que a matriz é não singular, logo invertível.

1.3.5.3. Dilatação do tempo

Considere-se que um relógio fixo em $x \;\; x_A$, no referencial S, regista dois acontecimentos sucessivos separados por um intervalo de tempo T_0.

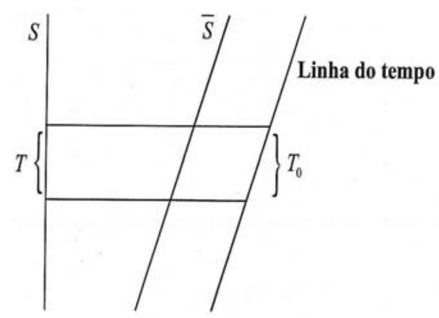

Figura 1.9. : Acontecimentos sucessivos registados por um relógio fixo em S.

Os acontecimentos sucessivos em S são $\left(x_a\ , t_1\ \right)$ e $\left(x_a\ , t_1 \quad T_0\right)$. Utilizando as transformações de Lorentz, em S, tem-se

$$t_1 \quad \left(t_1 \quad \frac{x_A}{c^2}\right), \qquad t_2 \quad \left(t_1 \quad T_0 \quad \frac{x_A}{c^2}\right). \qquad (1.204)$$

pelo que o intervalo de tempo, em S, definido por $T \quad t_2 \quad t_1$ é

$$T \quad T_0 \qquad (1.205)$$

o que demonstra que os relógios em movimento se atrasam através do factor

$$1 \quad {}^2/c^2 \quad \frac{1}{2}.$$

A este fenómeno chama-se **dilatação do tempo**. A taxa mais rápida de tempo corresponde ao relógio em repouso (relógio ideal) e chama-se **taxa própria**.

O tempo medido por um relógio ideal, aquele que não é afectado pela sua aceleração e cuja taxa depende da sua velocidade instantânea, chama-se **tempo próprio** . Este tempo entre t_1 e t_2 é dado por

$$_{t_1}^{t_2}\left(1 \quad \frac{2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt. \qquad (1.206)$$

1.3.5.4. Contracção do comprimento

Considere-se a barra fixa no referencial S de extremidades x_A e x_B , descrita na figura seguinte

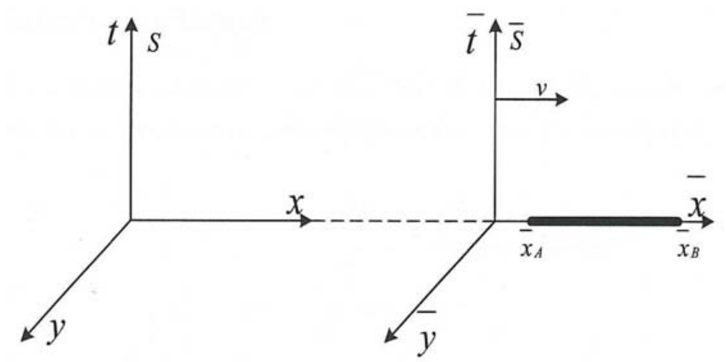

Figura 1.10. : Movimento de um corpo com velocidade em relação a S.

O referencial S move-se com velocidade em relação a S. No referencial S, o corpo tem coordenadas x_A e x_B obtidas pelas transformações de Lorentz

$$x_A \quad x_A \quad t_A \qquad \text{e} \qquad x_B \quad x_B \quad t_B \ . \qquad (1.207)$$

O comprimento da barra em repouso, i.e., medido em S é dado por

$$l_0 \quad x_A \quad x_B \quad x, \qquad (1.208)$$

medido em S, no instante $t \quad t_A \quad t_B$ é

$$l \quad x_A \quad x_B \quad x. \qquad (1.209)$$

De (1.207), vem que

$$l \quad {}^1 l_0 \qquad (1.210)$$

verificando-se, assim, que o comprimento de um corpo na direcção do seu movimento, com velocidade uniforme , tem uma redução de $\sqrt{1 \quad {}^2/c^2}$. A este fenómeno dá-se o nome de **contracção do comprimento**.

O corpo tem maior comprimento no referencial onde se encontra em repouso, neste caso, em S. Este comprimento é o **comprimento próprio**.

1.3.6. 4-Vectores

1.3.6.1. 4-posição

A formulação tensorial da relatividade restrita assenta na invariância de

$$ds^2 \qquad dx \; dx$$

sendo as coordenadas no espaço-tempo M representadas por x , em que $0, 1, 2, 3$ e

$$x^0 \quad t \qquad x^1 \quad x \qquad x^2 \quad y \qquad x^3 \quad z$$

A x chama-se vector **4-posição**.

1.3.6.2. 4-velocidade e 4-aceleração

Considere-se o movimento de uma partícula de acordo com a curva x no referencial inercial S. O movimento é parametrizado pelo tempo próprio . Para uma partícula, a sua 4-posição x é temporal, isto é, $x \; x \quad 0$, o que significa que a linha de universo da partícula está dentro do cone de luz já que a sua velocidade não pode ser superior à da luz. No referencial S, a partícula move-se com a 3-velocidade

$$\mathbf{v} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

A **4-velocidade** será definida pela variação do vector posição da partícula em relação ao tempo próprio:

$$\frac{dx}{d}, \qquad 0,1,2,3 \ . \qquad (1.211)$$

Como dx é um 4-vector e d é um invariante, é um 4-vector.

Pelo fenómeno da dilatação do tempo, tem-se que

$$d \quad dt. \qquad (1.212)$$

Uma vez que

$$\frac{dx}{d}\frac{dx}{d}$$

$$d \ ^2 \quad dx \ dx$$

$$dx \ dx \qquad d \ ^2 \quad 0 \qquad (1.213)$$

e

$$ds^2 \quad dx \ dx \quad c^2 \ d \ ^2, \qquad (1.214)$$

verifica-se que c^2 0, ou seja, a 4-velocidade é um vector temporal e invariante.

Por analogia com a Mecânica Clássica, pode definir-se a **4-aceleração** pela relação

$$a \quad \frac{d}{d}. \qquad (1.215)$$

1.3.6.3. 4-Força e 4- Momento

Considere-se, novamente, a partícula do caso anterior. Através da segunda lei de Newton, sabe-se que a força é dada por

$$\mathbf{F} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{1.216}$$

em que **p** é a quantidade de movimento. Analogamente, é possível definir um 4-vector da forma

$$F \quad \frac{dp}{dt}, \qquad 0,1,2,3 \tag{1.217}$$

em que F é a **4-força** e p o **4-momento**. A definição de 4-momento vem da Mecânica Clássica e, assim, o 4-momento será

$$p \quad m_0 \quad , \tag{1.218}$$

sendo m_0 a massa inercial da partícula no seu referencial de repouso e a 4-velocidade. A m_0 dá-se o nome de **massa de repouso** ou **massa própria** (a massa da partícula medida por um observador que se desloca com ela) e é um invariante. Assim, (1.217) pode escrever-se na forma

$$F \quad \frac{dp}{dt} \quad m_0 \frac{d}{dt} \tag{1.219}$$

onde se assume que a massa em repouso, m_0, não varia durante o movimento.

$m \quad m_0$ é a massa inercial da partícula, i.e.,

$$m \quad \frac{m_0}{\sqrt{1 \quad ^2/c^2}} \quad m_0 \tag{1.220}$$

representa a massa em movimento da partícula que se move com uma velocidade . O **4-momento** definir-se-á, então, por

$$p \quad m_0 \quad m \quad . \tag{1.221}$$

1.3.6.4. A 4-força de Minkowski

As questões do movimento de Newton, embora invariantes durante uma transformação de Galileu, não são invariantes na transformação de Lorentz. Têm que ser generalizadas de forma a obter-se uma lei para a força que satisfaça os requisitos covariantes da Relatividade Restrita.

Considere-se **F** a força de Minkowski e **f** a força de Newton. A 4-força é definida pela relação

$$F \qquad \frac{dp}{d} \qquad\qquad 0,1,2,3$$

o que faz com que a generalização que se procura seja tal que, para velocidades muito pequenas quando comparadas com c, a equação se reduza à forma clássica

$$f^i \qquad \frac{dp^i}{dt} \qquad i \quad 0,1,2,3$$

sendo f a força de Newton.

Como d e dt estão relacionados através da expressão (1.212), a equação para a força de Newton pode escrever-se na forma

$$f^i \qquad \frac{dp^i}{d} \tag{1.222}$$

ou seja

$$f^i \qquad \frac{dp^i}{d}. \tag{1.223}$$

Esta expressão mostra que as componentes espaciais do 4-vector da força de Minkowski estão relacionadas com a força de Newton através da relação

$$F^i \qquad f^i \qquad i \quad 1,2,3 \tag{1.224}$$

Incluindo a parte temporal do 4-vector da força de Minkowski, chega-se à expressão para a **4-força de Minkowski**:

$$\mathbf{F} \qquad \tfrac{1}{c}\mathbf{f.v},\mathbf{f} \ . \tag{1.225}$$

1.4. A Relatividade Geral

Em 1915, Einstein desenvolveu a Teoria da Relatividade Geral na qual considerava todos os objectos acelerados em relação a outros. Esta teoria foi desenvolvida numa tentativa de explicar conflitos aparentes entre as leis da relatividade e as leis da gravidade, baseada num novo conceito de gravitação e atendendo a vários princípios.

1.4.1. Os princípios

Há cinco princípios que, explícita ou implicitamente, guiaram Einstein na sua busca da Teoria da Relatividade Geral: Princípio de Mach, Princípio de Equivalência, Princípio da Covariância, Princípio da Acoplamento Mínimo Gravitacional e Princípio da Correspondência.

1.4.1.1. Princípio de Mach

A essência dos dois primeiros princípios vem da compreensão da natureza das leis de Newton que se aplicam apenas a referencias inerciais e são os seguintes os postulados do **princípio de Mach** relevantes para a formulação da teoria da Relatividade Geral:

M_1. *A distribuição de matéria determina a geometria*. (Este postulado incorpora o essencial das ideias de Mach.)

M_2. *Se não há matéria, não há geometria*. (Aqui é referida a impossibilidade de falar sobre movimento ou geometria no vácuo.)

M_3. *Um corpo, no vácuo, não possui propriedades inerciais*. (Uma vez que, sendo o corpo único, nada há que interaja com ele.)

1.4.1.2. Princípio de Equivalência

Considere-se uma partícula que experimenta um campo gravitacional mas que não altera o campo ou contribui para ele. O resultado obtido empiricamente por Galileu, na experiência de Pisa, ganha força num princípio:

P_1. *O movimento de uma partícula num campo gravitacional é independente da sua massa e da sua composição*.

Esta é a forma forte do **Princípio de Equivalência** que contribuirá para a construção da Teoria da Relatividade Geral. Enquanto que na Mecânica Clássica é um resultado empírico, na Relatividade Geral torna-se um hipótese essencial que, se falhar, fará ruir a teoria.

Assumindo que a matéria tanto responde a como é fonte de um campo gravitacional e, como se verificou na Relatividade Restrita que matéria e energia são equivalentes, a afirmação sobre o campo gravitacional aplica-se também à energia. Assim, a forma fraca do Princípio de Equivalência refere que

P_2. *O campo gravitacional está acoplado a tudo*.

Nenhum corpo pode ser isolado de um campo gravitacional, no entanto, é possível remover os efeitos gravitacionais localmente. Isto faz-se considerando em sistema de referência em queda livre. Em particular, se se escolher um sistema que não esteja em rotação, volta-se ao conceito de referencial inercial (pelo menos, localmente). Neste referencial, as partículas mantêm-se em repouso ou movem-se em linhas rectas com velocidade uniforme. Assim, chega-se à seguinte versão do Princípio de Equivalência

P_3. *Existem experiências não locais que distinguem queda livre sem rotação num campo gravitacional de movimento uniforme no espaço na ausência de gravitação*.

Einstein notou outra coincidência na Teoria Newtoniana que se mostrou de grande importância na formulação do princípio de equivalência. Todas as forças inerciais são proporcionais à massa do corpo sobre o qual actuam. Há uma outra força que se comporta da mesma forma - a **força de gravitação**. Se se deixarem cair dois corpos no campo gravitacional da terra, eles experienciam forças m_1g e m_2g, respectivamente. Esta coincidência levou Einstein a pensar que os dois efeitos teriam a mesma origem. Sugeriu, então, que se tratasse a gravitação como um efeito inercial, e surge uma nova versão do Princípio de Equivalência

P_4. *Um referencial linearmente acelerado relativamente a um referencial inercial em Relatividade Restrita é*, *localmente*, *idêntico a um referencial em repouso num campo gravitacional*.

Estas duas últimas versões do Princípio de Equivalência podem ser clarificadas pelas famosas **experiências com elevadores** de Einstein que a seguir se descrevem.

Considere-se um observador num elevador ou, mais precisamente, uma sala sem janelas ou outros meios de comunicação com o exterior. O observador desenvolve experiências dinâmicas simples e o objectivo é determinar o estado de movimento do observador. Considerem-se quatro estados de movimento.

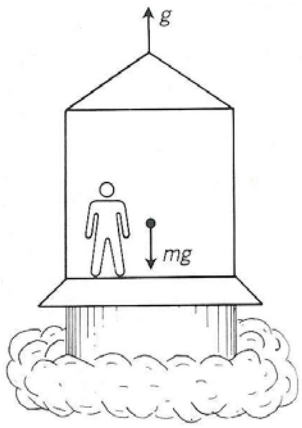

Figura 1.11.: O elevador num foguetão

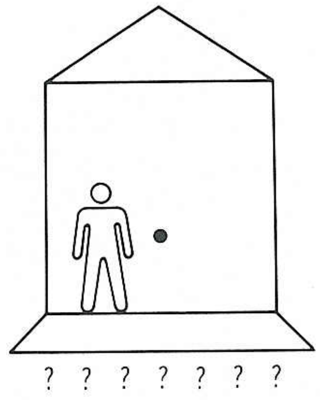

Figura 1.12.: O elevador num foguetão sem aceleração

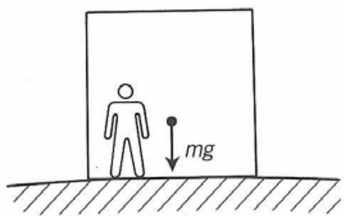

Figura 1.13.: O elevador na superfície da terra

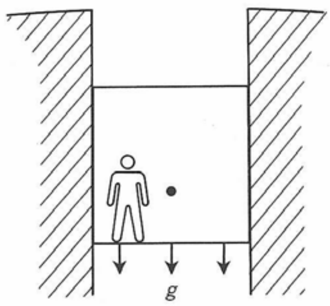

Figura 1.14. : O elevador deixado cair em queda livre

Caso 1: (figura 1.11.) O elevador é colocado num foguetão numa parte do universo na ausência de forças gravitacionais. O foguetão tem aceleração constante g relativamente a um observador inercial. O observador no elevador retira o corpo do descanso e vê-o cair no chão com aceleração g.

Caso 2: (figura 1.12.) O motor do foguetão é desligado e o elevador ganha movimento uniforme relativamente ao observador inercial. Nesta situação, se se lançar um corpo ele mantém-se em repouso relativamente ao observador.

Caso 3: (figura 1.13.) O elevador é colocado na superfície da terra, ignorando-se os seus movimentos rotacional e orbital. O corpo que se mantinha em repouso cai para o chão com aceleração g.

Caso 4: (figura 1.14.) Finalmente, o elevador é deixado cair, em queda livre, em direcção ao centro da terra. O corpo lançado mantém-se em repouso em relação ao observador.

Do ponto de vista do observador, os casos um e três são o mesmo, por P_4, e os casos dois e quatro também são o mesmo, por P_3, o que leva ao conceito de um espaço-tempo não plano, i.e., um espaço-tempo com curvatura.

Em Relatividade Geral, num sistema de coordenadas adaptado a um referencial inercial, nomeadamente as coordenadas de Minkowski, a equação para uma partícula livre é

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} = 0. \qquad (1.226)$$

Se se usar um referencial não inercial de referência, é equivalente a usar um sistema de coordenadas mais geral e, neste caso, a equação fica

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{d\tau}\frac{dx^c}{d\tau} = 0, \qquad (1.227)$$

onde Γ^a_{bc} é a conexão métrica de g_{ab} que é uma métrica plana, embora não seja a métrica de Minkowski, η_{ab}. Os termos adicionais envolvendo Γ^a_{bc} que surgem são os termos das forças inerciais referidos anteriormente. Então, o princípio de equivalência requer que as forças gravitacionais, bem como as forças inerciais, devem ser dadas por um apropriado Γ^a_{bc}. Neste caso, o espaço-tempo não poderá ser plano, pois, a sê-lo, não haveria distinção do caso não gravitacional. A generalização mais simples é manter Γ^a_{bc} como a conexão métrica, a conexão métrica de uma métrica não plana. Interpretando Γ^a_{bc} como os termos associados à força, pode considerar-se g_{ab}

os potenciais. As equações de campo da gravitação Newtoniana consistem nas equações diferenciais parciais de segunda ordem no potencial gravitacional . De forma análoga, espera-se que a Relatividade Geral também envolva equações diferenciais parciais de segunda ordem nos potenciais g_{ab}.

1.4.1.3. Princípio da Covariância

Recorde-se o princípio da Relatividade Restrita que refere que todos os observadores são equivalentes. Na Relatividade Geral incluem-se observadores não inerciais, dizendo Einstein que todos os observadores deverão ser capazes de descobrir as leis físicas.

Os observadores estão intimamente relacionados com os seus sistemas de referência ou de coordenadas. Assim, se um observador é capaz de descobrir as leis físicas, então outro, num qualquer sistema de coordenadas, também o deverá conseguir fazer. A situação é diferente na Relatividade Restrita, onde, pelo facto da métrica ser plana e a conexão integrável, existe um sistema de coordenadas preferencial, nomeadamente as coordenadas de Minkowski. Num espaço-tempo com curvatura, isto é, uma variedade com uma métrica não plana, não existe um sistema canónico de coordenadas. No entanto, em várias aplicações existirão sistemas de coordenadas preferenciais. Por exemplo, muitos problemas possuem simetrias, facto que deve ser aproveitado. Será importante realçar que a teoria deverá ser invariante sob mudança de coordenadas. Então, é de grande importância o princípio da Relatividade Geral contido no **Princípio da Covariância** :

As equações físicas deverão escrever-se na forma tensorial, relativamente ao grupo de transformação geral de coordenadas.

1.4.1.4. Princípio da Acoplamento Mínimo Gravitacional

Os princípios referidos anteriormente não permitem chegar às equações de campo de sistemas em Relatividade Geral quando as correspondentes equações são conhecidas em Relatividade Restrita. O Princípio de Acoplamento Mínimo Gravitacional refere, essencialmente, que não deverão ser adicionados termos não necessários ao fazer a transição da Relatividade Restrita para a Geral.

Por exemplo, considere-se a lei de conservação

$$ {}_bT^{ab} \quad 0 \qquad (1.228) $$

em coordenadas de Minkowski, na Relatividade Restrita. A generalização mais simples para a Relatividade Geral é a equação na forma tensorial

$$ {}_bT^{ab} \quad 0. \qquad (1.229) $$

No entanto, também se poderia considerar a equação

$$ {}_bT^{ab} \quad g^{be}R^a_{bcd} \quad {}_eT^{cd} \quad 0 \qquad (1.230) $$

uma vez que $R^a_{bcd} \quad 0$ em Relatividade Restrita e (1.230) reduz-se à equação (1.228), em coordenadas de Minkowski. Assim chega-se à seguinte formulação do **Princípio de Acoplamento Mínimo Gravitacional**

Termos que contenham explicitamente o tensor curvatura não deverão ser adicionados ao fazer-se a transição da Relatividade Restrita para a Relatividade Geral.

1.4.1.5. Princípio da Correspondência

Qualquer nova teoria deverá ser consistente com qualquer teoria (aceitável) anterior nos seus campos de validade. A Teoria da Relatividade Geral deverá, por um lado, corresponder à Teoria da Relatividade Restrita na ausência de gravitação e, por outro, à Teoria Gravitacional de Newton no limite de campos gravitacionais fracos e velocidades pequenas (quando comparadas com a velocidade da luz). Este facto dá origem ao **Princípio da Correspondência** indicado na figura 1.15, onde as setas indicam a direcção de maior especificação.

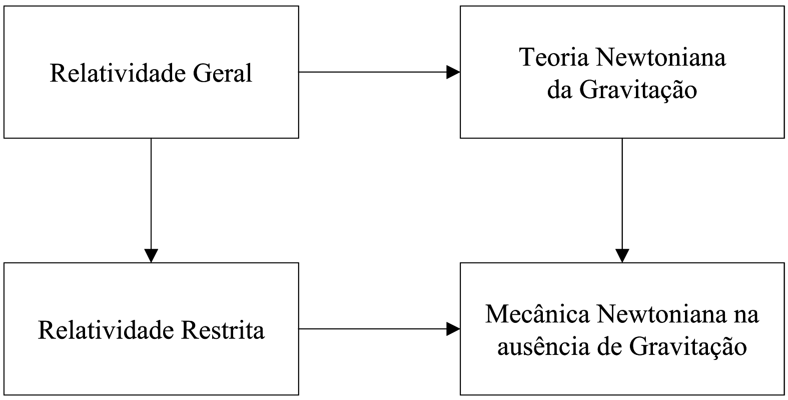

Figura 1.15.: Princípio da Correspondência da Teoria da Relatividade Geral.

1.4.2. As equações de campo

1.4.2.1. Experiências com elevadores

Do que foi referido na secção anterior, pode concluir-se que, localmente, i.e., não considerando variações no campo gravitacional, se está num caso de relatividade restrita. No entanto, sem ser localmente, tem-se uma métrica com curvatura cujos componentes serão os potenciais do campo gravitacional. Fazendo uma correspondência com a teoria Newtoniana, é sugerido que se considerem as equações de campo de segunda ordem nestes potenciais e, pelo Princípio de Covariância, estas equações deverão ser tensoriais. A teoria Newtoniana poderá, então, ser reformulada, conduzindo ao conjunto de equações da Relatividade Geral.

Retomem-se as experiências com elevadores descritas na secção anterior. Assume-se que o equipamento do observador permite detectar variações no campo gravitacional. As quatro experiências decorrem como as descritas anteriormente, mas, desta feita, são dois os corpos que, quando lançados, se mantêm em repouso em relação a um observador e cujas interacções mútuas deverão ser ignoradas.

Caso1: Do ponto de vista do observador no elevador, os dois corpos caem para o solo, paralelamente um ao outro.

Caso 2: Os corpos mantêm-se em descanso relativamente ao observador.

Caso 3: Os dois corpos caem em direcção ao centro da terra e, depois, as suas trajectórias convergem.

Caso 4: Na óptica do observador, os corpos parecem juntar-se no seu movimento, pois as suas trajectórias convergem em direcção ao centro da terra.

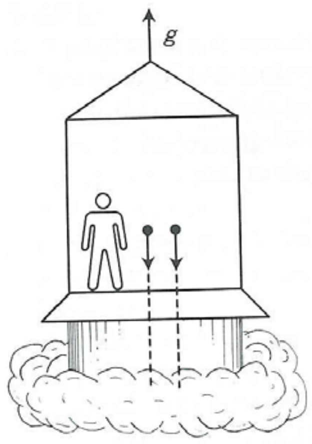

Figura 1.16.: O elevador num foguetão

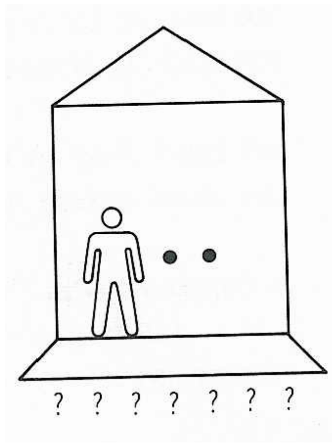

Figura 1.17.: O elevador num foguetão sem aceleração

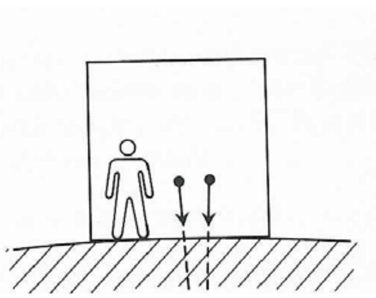

Figura 1.18.: O elevador na superfície da terra

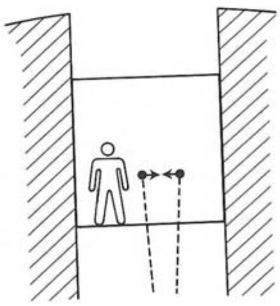

Figura 1.19. : O elevador deixado cair em queda livre

Assim, o observador distingue o campo inercial uniforme do caso 1 do campo da terra, gravitacional não uniforme, do caso 3. Mais uma vez, em queda livre, as trajectórias dos corpos são linhas geodésicas num campo gravitacional que convergem (ou divergem) como no caso 4. O objectivo destas experiências é mostrar que a presença de um campo gravitacional genuíno, distinto de um campo inercial, se verifica através da observação da variação do campo e não do campo propriamente dito. Ver-se-á que, na Relatividade Geral, esta variação é descrita pelo tensor de Riemann na equação do desvio geodésico.

1.4.2.2. Equação do desvio de Newton

As experiências dos elevadores atrás referidas levam a que se foque a atenção em duas partículas em queda livre num campo gravitacional. Veja-se este movimento na teoria Newtoniana. Introduzam-se coordenadas cartesianas

$$x \qquad x^1, x^2, x^3 \qquad x, y, z$$

e considere-se que os índices gregos variam de 1 a 3. O elemento linha do espaço euclidiano IR^3 é

$$d\ ^2 \quad dx^2 \quad dy^2 \quad dz^2$$

a partir do qual se obtém a métrica euclidiana

$$g \qquad\qquad diag\ 1,1,1\ . \tag{1.231}$$

Podem subir-se e descer índices usando o símbolo de Kronecker. Embora na teoria Newtoniana não haja realmente distinção entre índices subidos ou descidos(tensores covariantes/contravariantes), a notação fica assim definida de modo a ajudar a comparar resultados, posteriormente obtidos, na teoria da Relatividade Geral. Considerem-se as trajectórias de duas partículas de massa unitária deslocando-se no vácuo num campo gravitacional de potencial .

Sejam C_1 e C_2 as curvas onde as partículas se deslocam de modo que atinjam os pontos P e Q no instante t.

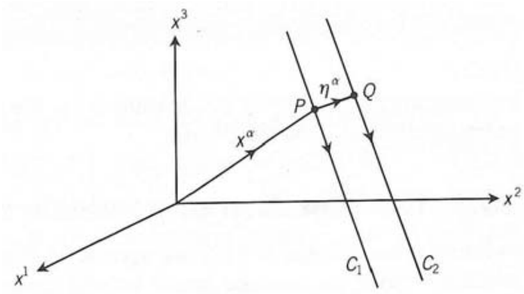

Figura 1.20. : Partículas em queda livre no instante t.

Usando o tempo t como o parâmetro ao longo das curvas, as equações paramétricas de C_1 são

$$x \quad x \;\; t \tag{1.232}$$

e as de C_2

$$x \quad x \;\; t \qquad t \tag{1.233}$$

onde é um vector que liga os pontos das duas curvas no mesmo instante t. Uma vez que as partículas têm massa unitária, a equação de movimento da primeira partícula podem ser escritas na forma tensorial por

$$1\, x \qquad 1 \quad , \tag{1.234}$$

onde o ponto se refere à derivada em ordem ao tempo e

$$\left(\frac{}{x}, \frac{}{y}, \frac{}{z} \right) \qquad grad \quad _P \tag{1.235}$$

em que $grad \quad _P$ dá o gradiente do potencial no ponto P.

Do mesmo modo, omitindo as massas unitárias, a equação de movimento da segunda partícula é

$$x \qquad\qquad\qquad _Q. \tag{1.236}$$

Uma vez que é pequeno, o segundo membro pode expandir-se pela fórmula de Taylor, obtendo-se

$$_Q \qquad\qquad _P \qquad\qquad\qquad _P \tag{1.237}$$

com derivadas de primeira ordem. Subtraindo (1.234) de (1.236), obtém-se

$$ \tag{1.238} $$

Definindo-se o tensor k como

$$k \qquad , \tag{1.239}$$

a equação de movimento (1.238) do vector , à qual se chama *equação do desvio de Newton*, fica

$$k \qquad 0. \tag{1.240}$$

Esta equação está relacionada com as equações de campo Newtonianas no vácuo, nomeadamente, a equação de Laplace que pode ser escrita como

$$k \qquad 0. \tag{1.241}$$

uma vez que

$$^2 \quad 0 \quad \frac{^2}{x^2} \quad \frac{^2}{y^2} \quad \frac{^2}{z^2} \quad 0$$

$$\frac{}{x}\left(\frac{}{x}\right) \quad \frac{}{y}\left(\frac{}{y}\right) \quad \frac{}{z}\left(\frac{}{z}\right) \quad 0$$

$$0 \qquad k \qquad 0$$

O tensor k tem traço nulo. Veja-se agora a generalização relativista destas equações.

1.4.2.3. A equação do desvio geodésico

Pelos axiomas da Teoria da Relatividade Restrita, assume-se que as partículas na Relatividade Geral se deslocam em curvas geodésicas do tipo tempo. Considere-se a superfície S, de dimensão dois, definida por uma congruência de geodésicas do tipo tempo, i.e., uma família de geodésicas tal que exactamente uma das curvas passa em cada ponto de S. A equação paramétrica de S é dada por

$$x \quad x \quad , \quad , \qquad (1.242)$$

onde é o tempo próprio ao longo das geodésicas e é o rótulo usado para geodésicas distintas. Definam-se dois campos vectoriais em S por

$$^{a} \quad \frac{dx^{a}}{d} \qquad (1.243)$$

e

$$^{a} \quad \frac{dx^{a}}{dv} \qquad (1.244)$$

Então, ^{a} é o vector tangente à geodésica do tipo tempo em cada ponto e ^{a} é um vector ligação que une duas curvas vizinhas na congruência. O comutador de ^{a} e ^{a} satisfaz

$$
\begin{aligned}
v, \quad ^{a} \quad & v^{b} \; _{b} \; ^{a} \quad ^{b} \; _{b} v^{a} \\
& \frac{dx^{b}}{d} \frac{}{x^{b}} \left(\frac{dx^{a}}{dv} \right) \quad \frac{dx^{b}}{dv} \frac{}{x^{b}} \left(\frac{dx^{a}}{d} \right) \\
& \frac{d^{2}x^{a}}{d \; dv} \quad \frac{d^{2}x^{a}}{dvd} \quad 0
\end{aligned}
\qquad (1.245)
$$

uma vez que as derivadas parciais mistas comutam. O comutador é também igual à derivada de Lie $L \;\; ^{a}$ e é possível substituir as derivadas parciais por derivadas covariantes numa expressão para a derivada de Lie

$$
\begin{aligned}
0 \quad & L \quad ^{a} \\
& ^{b} \; _{b} \; ^{a} \quad ^{b} \; _{b} \; ^{a} \\
& ^{b} \; _{b} \; ^{a} \quad ^{b} \; _{b} \; ^{a} \\
& ^{a} \quad ^{a}.
\end{aligned}
\qquad (1.246)
$$

Fazendo a derivada covariante desta equação em ordem a ^{a}, obtém-se

$$^{a} \qquad ^{a}. \qquad (1.247)$$

Sendo

$$_{X} \quad _{Y}Z^{a} \quad _{Y} \quad _{X}Z^{a} \quad _{X,Y} \, Z^{a} \quad R^{a}_{bcd} Z^{b} X^{c} Y^{d} \qquad (1.248)$$

e fazendo X^{a} Z^{a} ^{a} e Y^{a} ^{a}, o segundo termo do primeiro membro desaparece, pois ^{a} é tangente a uma geodésica afim parametrizada, pelo que

$$ {}^{a} \quad 0 \qquad (1.249)$$

O terceiro termo de (1.248) desaparece por (1.245), uma vez que a derivada covariante de qualquer tensor com respeito ao tensor zero é zero. Então, (1.248) fica

$$ {}^{a} \quad R^{a}_{bcd} \; {}^{b} \; {}^{c} \; {}^{d} \quad 0 \qquad (1.250)$$

Por definição,

$$\frac{D^{2} \; {}^{a}}{D \; {}^{2}} \qquad {}^{a}$$

e, usando (1.247), a equação (1.250) dá origem à *equação do desvio geodésico*

$$\frac{D^{2} \; {}^{a}}{D \; {}^{2}} \quad R^{a}_{bcd} \; {}^{b} \; {}^{c} \; {}^{d} \quad 0 \qquad (1.251)$$

A derivada total ao longo da curva é o análogo, na forma tensorial, à derivada em ordem ao tempo ao longo da curva em (1.240). Mas, esta não será a melhor forma de comparar com (1.240), pois envolve o vector ^{a} de dimensão quatro. Interessa, sim, a informação espacial contida nesta equação que se obtém, introduzindo um operador projecção h^{a}_{b}, definido por

$$h^{a}_{b} \quad {}^{a}_{b} \quad {}^{a} \; {}_{b}, \qquad (1.252)$$

que projecta tensores no espaço tridimensional ortogonal a ^{a} em qualquer ponto P de S. Este operador respeita as seguintes propriedades:

(a) $h^{a}_{b} \; {}^{b} \quad 0,$

(b) $w^{a} \; {}_{a} \quad 0,$

(c) $h^{a}_{b} h^{b}_{c} \quad h^{a}_{c},$ (1.253)

(d) $h^{a}_{a} \quad 3,$

(e) $h_{ab} \quad h_{ba}.$

Assim, o vector ortogonal ^{a} define-se por

$$^{a} \quad h^{a}_{b} \; ^{b} \qquad (1.254)$$

Uma vez que ^{a} é um vector tangente unitário, pois

$$^{a} {}_{a} \quad g_{ab} \; ^{a} \; ^{b} \quad g_{ab} \frac{dx^{a}}{d} \frac{dx^{b}}{d} \quad 1 \qquad (1.255)$$

e, fazendo a derivada covariante com respeito a ^{a} e como a derivada covariante de 1 é 0, obtém-se

$$^{a} {}_{a} \quad ^{a} \quad {}_{a} \quad {}_{a} \quad ^{a} \quad 2 \; {}_{a} \quad ^{a} \quad 0 \qquad (1.256)$$

Então, usando (1.254), (1.249), (1.246) e (1.256),

$$\begin{aligned} \frac{D\ ^{a}}{D} \quad & ^{a} \\ & ^{a} \quad ^{a} {}_{b} \; ^{b} \\ & ^{a} \quad ^{a} {}_{b} \; ^{b} \quad ^{a} \quad {}_{b} \; ^{b} \quad ^{a} {}_{b} \quad ^{b} \\ & \frac{D\ ^{a}}{D} \quad ^{a} {}_{b} \quad ^{b} \\ & \frac{D\ ^{a}}{D}. \end{aligned} \qquad (1.257)$$

Uma vez que R^{a}_{bcd} é anti-simétrico em c e d,

$$\begin{aligned} R^{a}_{bcd} \; ^{b} \; ^{c} \; ^{d} \quad & R^{a}_{bcd} \; ^{b} \; ^{c} \quad ^{d} \quad ^{d} {}_{e} \; ^{e} \\ & R^{a}_{bcd} \; ^{b} \; ^{c} \; ^{d} \end{aligned} \qquad (1.258)$$

Então, (1.251) pode escrever-se em função de ^{a}, e, usando (1.257) e (1.258), obtém-se

$$\frac{D^{2}\ ^{a}}{D\ ^{2}} \quad R^{a}_{bcd} \; ^{b} \; ^{c} \; ^{d} \quad 0 \qquad (1.259)$$

Está, agora, escrita a equação do desvio geodésico em função de um vector ortogonal. É, no entanto, ainda uma equação de dimensão 4 e, na próxima secção, chegar-se-á à informação espacial que interessa.

1.4.2.4. A correspondência Newtoniana

Em qualquer ponto P na curva C_1, introduza-se um referencial ortogonal de três vectores unitários do tipo espaço

$$e^a \quad e_1^a, e_2^a, e_3^a \;,$$

todos ortogonais a ^{a} e onde varia de 0 a 3. Defina-se

$$e_0^a \quad {}^a$$

e, recordando (1.255), tem-se as seguintes relações de ortogonalidade

$$e_0^a e_{0a} \quad e_1^a e_{1a} \quad e_2^a e_{2a} \quad e_3^a e_{3a} \quad 1$$

(1.260)

$$e_0^a e_{1a} \quad e_0^a e_{2a} \quad e_0^a e_{3a} \quad e_1^a e_{2a} \quad e_1^a e_{3a} \quad e_2^a e_{3a} \quad 0$$

Os quatro vectores $e_i^a \;\; i \quad 0,1,2,3$ formam um referencial em P e as relações de ortogonalidade presentes em (1.260) podem ser reescritas como

$$e_i^a e_{ja} \quad {}_{ij} \tag{1.261}$$

onde ${}_{ij}$ é a métrica de Minkowski,

$$_{ij} \quad diag\; 1, \;\; 1, \;\; 1, \;\; 1$$

Considerando e_i^a como uma matriz 4 por 4 em P, a sua inversa pode definir-se por e_a^j tendo-se que

$$e_i^a e_a^j \quad {}^i_j \tag{1.262}$$

onde ${}^i_j$ é o símbolo de Kronecker ou, em termos matriciais, a matriz identidade.

Da mesma forma que se sobem ou descem índices dos tensores com a métrica g_{ab}, também se podem subir e descer índices no referencial com a métrica ${}_{ij}$. Multiplique-se (1.262) por e_b^i e escreva-se na forma

$$e_b^i e_i^a \; e_a^j \quad e_b^j$$

que é equivalente a

$$^a_b e_a^j \quad e_b^j \tag{1.263}$$

A interpretação física do referencial é a seguinte: $e_0^a \quad v^a$ é o vector 4-velocidade de um observador de C_1 e os três vectores do tipo espaço e^a são os vectores de coordenadas em P. Até ao momento, o referencial foi apenas definido em P, mas pode propagar-se ao longo de C_1 paralelamente, i.e.,

$$\frac{D}{D} e_i^a \quad 0 \qquad (1.264)$$

Da mesma forma que se obtêm as componentes cartesianas de um vector de dimensão 3 pelo produto escalar, também se definem as componentes espaciais do referencial do vector ortogonal ^{a} por

$$e_a \ ^a \qquad (1.265)$$

Este é, precisamente, o análogo do vector da secção 1.2.. Note-se que, por (1.254) e (1.253a)

$$^0 \quad e_a^0 \ ^a \quad 0 \qquad (1.266)$$

Para encontrar a parte espacial de (1.259), contraia-se esta expressão com e_a e, usando (1.264), obtém-se

$$\frac{D^2 \ ^a}{D \ ^2} \quad R^a_{bcd} e_a \ ^b \ ^c \ ^d \quad 0 \qquad (1.267)$$

Usando (1.262), (1.266) e (1.265), tem-se que

$$\begin{aligned} ^d \quad & ^d_c \ ^c \quad e_i^d e_c^i \ ^c \\ & e_0^d e_c^0 \ ^c \quad e^d e_c \ ^c \\ & e^d \end{aligned} \qquad (1.268)$$

e, substituindo em (1.267), pode escrever-se a parte espacial da equação do desvio geodésico como

$$\frac{D^2}{D \ ^2} \quad k \quad 0 \qquad (1.269)$$

onde

$$K \quad R^a_{bcd} e_a \ ^b \ ^c e^d \qquad (1.270)$$

A equação (1.269) é a análoga a (1.240) que se procurava.

1.4.2.5. As equações da Relatividade Geral no vácuo

Viu-se, anteriormente, que as equações da teoria Newtoniana no vácuo podem ser expressas através do anulamento do traço de k . De forma análoga, procure-se o anulamento de traço de (1.270), nomeadamente,

$$R^a_{bcd} e_a \; {}^b \; {}^c e^d \quad 0 \qquad (1.271)$$

Introduza-se um sistema especial de coordenadas em P adaptado ao referencial de modo que, neste sistema de coordenadas,

$$e^a_0 \quad 1,0,0,0 \;, \qquad e^a_1 \quad 0,1,0,0 \;, \qquad e^a_2 \quad 0,0,1,0 \;, \qquad e^a_3 \quad 0,0,0,1 \;,$$

ou, mais sucintamente,

$$e^a_i \quad {}^a_i .$$

Então, (1.271) fica

$$R_{00} \quad 0$$

Mas, uma vez que o tensor de Riemann é anti-simétrico no último par de índices, vem que, em qualquer sistema de coordenadas

$$R^0_{000} \quad 0,$$

e

$$R^a_{00a} \quad 0.$$

Então,

$$0 \quad R^a_{00a} \quad R^a_{bca} \, {}^b_0 \, {}^c_0 \quad R^a_{bca} \, {}^b \, {}^c \quad R^a_{bac} \, {}^b \, {}^c \quad R_{bc} \, {}^b \, {}^c .$$

Assim, $R_{bc} \, {}^b \, {}^c$ é um escalar e se se anula num sistema de coordenadas, anula-se em todos os sistemas de coordenadas. Mais ainda, se se anula para todos os observadores, i.e., para todos os vectores ^{a} do tipo tempo em P, vem que $\left. R_{ab} \right|_{P} = 0$. Por fim, uma vez que P é arbitrário, a analogia sugere que as equações da relatividade geral no vácuo sejam

$$R_{ab} = 0. \qquad (1.272)$$

O anulamento do tensor de Ricci é equivalente ao anulamento do tensor de Einstein:

$$G_{ab} = 0 \Leftrightarrow R_{ab}$$

Veja-se porquê:

$$\begin{aligned} R_{ab} = 0 \Rightarrow G_{ab} &= R_{ab} - \tfrac{1}{2} R g_{ab} \\ &= R_{ab} - \tfrac{1}{2}\left(g^{cd} R_{cd} \right) g_{ab} \\ &= 0 - \tfrac{1}{2}.0.g_{ab} = 0 \end{aligned} \qquad (1.273)$$

e

$$\begin{aligned} G_{ab} = 0 \Rightarrow & R_{ab} - \tfrac{1}{2} R g_{ab} = 0 \\ \Rightarrow & g^{ab} R_{ab} - \tfrac{1}{2} R g^{ab} g_{ab} = 0 \\ \Rightarrow & R - \tfrac{1}{2} R.4 = 0 \\ \Rightarrow & R = 0 \end{aligned} \qquad (1.274)$$

logo,

$$R_{ab} - \tfrac{1}{2} R g_{ab} = R_{ab} = 0. \qquad (1.275)$$

Então, pode escrever-se, em alternativa,

$$G_{ab} = 0 \qquad (1.276)$$

As equações (1.272) e (1.276) são as equações propostas por Einstein como as *equações da relatividade geral para o vácuo*.

1.4.2.6. Formulação da Teoria da Relatividade Geral

Resumam-se, agora, os principais pontos da Teoria da Relatividade Geral.

a) O princípio de equivalência refere que, num corpo em queda livre num campo gravitacional, se pode eliminar a gravidade localmente e considerar a Relatividade Restrita.

b) Afirma-se ainda que, localmente, não há distinção entre um campo gravitacional de um campo inercial uniformemente acelerado e, consequentemente, a gravidade deve ser vista como uma força inercial.

c) Segundo a Relatividade Restrita, assume-se que as partículas livres se deslocam em geodésicas do tipo tempo. Então, as forças inerciais surgem nas equações geodésicas nos termos que envolvem a conexão métrica associada a uma métrica de um espaço sem curvatura. De forma a incluir o efeito da gravidade na conexão métrica, generaliza-se a métrica para ser curva.

d) A métrica toma o papel dos potenciais da teoria e, em analogia com a Teoria Newtoniana, procura-se um conjunto de equações diferenciais parciais de segunda ordem para os potenciais como as equações de campo para a teoria. Pelo princípio da covariância, estas equações deverão ser tensoriais.

e) Considerando os efeitos não locais, poder-se-á observar um campo gravitacional genuíno, pela variação no campo e não pela observação do campo em si mesmo. Estas variações levam a que as partículas livres se movam em geodésicas do tipo tempo que convergem (ou divergem) e a convergência é descrita pelo tensor de Riemann na equação do desvio geodésico.

f) O tensor de Riemann é um tensor que envolve derivadas parciais de segunda ordem da métrica pelo que as equações de campo da teoria devem envolver este tensor. O facto de nas equações de campo no vácuo, na Teoria Newtoniana, se verificar o anulamento do tensor contraído sugere que se possa considerar a contracção do tensor de Riemann. O anulamento do tensor de Ricci é equivalente ao anulamento do tensor de Einstein.

1.4.2.7. As equações de campo da Relatividade Geral

Vejam-se as equações de campo que se verificam mesmo em campo que não o gravitacional. Estes campos são descritos pelo tensor de impulsão-energia T^{ab}. A equivalência entre massa e energia da Relatividade Restrita sugerem que todas as formas de energia são fontes de energia para o campo gravitacional. Na Relatividade restrita, em coordenadas de Minkowski, o tensor de impulsão-energia satisfaz as equações

$$_{b}T^{ab} \quad 0.$$

O princípio de acoplamento mínimo gravitacional sugere uma generalização à Relatividade Geral

$$_{b}T^{ab} \quad 0.$$

No entanto, sabe-se que a derivada covariante do tensor de Einstein se anula pelas identidades de Bianchi $_{b}G_{a}^{b} \quad 0$

$$_{b}G_{a}^{b} \quad 0.$$

As duas últimas equações indicam que os dois tensores são proporcionais, podendo escrever-se

$$G^{ab} \quad kT^{ab}, \qquad (1.277)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. Esta equação obedece ao postulado M_1 do princípio de Mach, uma vez que a matéria T^{ab} determina a geometria G^{ab} e é fonte de efeitos inerciais. A constante k é determinada pelo princípio da correspondência uma vez que esta equação, no limite, se reduz à equação de Poisson. Em unidades não relativistas, k é dado por

$$k = 8\pi G/c^4. \qquad (1.278)$$

As equações (1.277), com k definido por (1.278), constituem as equações de campo da Relatividade Geral. Trabalhando em unidades relativistas, em que $c = G = 1$, k é, simplesmente, dado por

$$k = 8\pi . \qquad (1.279)$$

A Teoria da Relatividade Geral consiste nos axiomas da Relatividade Restrita atrás referidos excepto I (iii) que é, agora, substituído pela equação (1.277) sujeita a (1.278).

1.4.3. Relatividade Geral a partir do princípio Variacional

1.4.3.1. Restrições diferenciais nas equações de campo

O princípio variacional parte de uma especificação de uma densidade Lagrangeana $\mathcal{L}$ que é um funcional da métrica g_{ab} e das suas derivadas, i.e.,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(g_{ab},\ \partial_c g_{ab},\ \partial_d \partial_c g_{ab}, \dots\right). \qquad (1.280)$$

$\mathcal{L}$ deverá ser uma densidade escalar de peso 1 de modo a poder formar-se o integral de acção

$$I = \int_\Omega \mathcal{L}\, d\Omega \qquad (1.281)$$

numa região da variedade. O princípio da acção estacionária afirma que, fazendo variações arbitrárias em g_{ab} que se anulem na fronteira de , então I será estacionário. Usando uma notação formal, vem

$$g_{ab} \quad g_{ab} \quad g_{ab} \qquad I \quad I \quad I \qquad \text{com } I \quad 0, \tag{1.282}$$

onde

$$I \qquad \mathcal{L}^{ab} \; g_{ab} d \tag{1.283}$$

e $\mathcal{L}^{ab}$ é a derivada de Euler - Lagrange

$$\mathcal{L}^{ab} \quad \frac{\mathcal{L}}{g_{ab}}. \tag{1.284}$$

As equações de campo serão

$$\mathcal{L}^{ab} \quad 0. \tag{1.285}$$

Uma vez que I é a diferença entre dois escalares será ele próprio um escalar e, de (1.283), vem que $\mathcal{L}^{ab}$ é um tensor densidade simétrico de peso 1. Há algumas condições nos diferenciais das equações de campo que se verificam independentemente de as equações de campo se verificarem ou não e que advêm do facto de $\mathcal{L}$ ser uma densidade. Na Relatividade Geral serão as identidades de Bianchi.

Faça-se uma variação em g_{ab} que resulta de uma simples mudança de coordenadas em . Então, uma vez que I se mantém invariante, I será idêntico a zero,

$$I \quad 0. \tag{1.286}$$

Se se considerar uma mudança infinitesimal de coordenadas em

$$x^a \quad x'^a \quad x^a \quad X^a \; x \;, \tag{1.287}$$

onde X^a é um campo suave de vectores (vectores cujos componentes são funções de classe C) que se anula na fronteira de .

Através de alguns cálculos, por (1.283), (1.286) e

$$g_{ab} \quad g_{ab}\; x \quad g_{ab}\; x \qquad \mathcal{L}_X g_{ab} \qquad {}_b X_a \quad {}_a X_b \tag{1.288}$$

obtém-se

$$0 \quad I \quad 2 \quad \mathfrak{L}^{ab} \;\; {}_b X_a \;\, d \quad ,$$

uma vez que, pela definição (1.284), $\mathfrak{L}^{ab}$ é simétrico. Usando integração por partes, vem

$$0 \quad 2 \qquad {}_b\mathfrak{L}^{ab} \;\, X_a d \qquad 2 \qquad {}_b \;\mathfrak{L}^{ab} X_a \;\, d \quad . \tag{1.289}$$

O termo dentro de parêntesis rectos é uma densidade vectorial de peso 1, pelo que se sabe que a sua derivada covariante pode ser substituída pela derivada parcial. Então, pelo teorema da divergência,

$$2 \qquad {}_b \;\mathfrak{L}^{ab} X_a \;\, d \qquad 2 \qquad \mathfrak{L}^{ab} X_a dS_b, \tag{1.290}$$

que converte o último termo de (1.289) num integral de superfície. Mas, por hipótese, X^a anula-se em , pelo que este termo anular-se-á, também. Então, (1.289) reduz-se a

$${}_b\mathfrak{L}^{ab} \;\, X_a d \qquad 0, \tag{1.291}$$

e, uma vez que é arbitrário, obtém-se

$${}_b\mathfrak{L}^{ab} \;\, X_a \quad 0. \tag{1.292}$$

Por fim, como X^a é, também, arbitrário, obtêm-se as identidades diferenciais

$${}_b\mathfrak{L}^{ab} \quad 0. \tag{1.293}$$

1.4.3.2. Um exemplo simples

Use-se a seguinte notação para representar densidades tensoriais de peso 1 que se obtêm a partir do produto de um tensor por $g^{\frac{1}{2}}$

$$\mathfrak{g}_{ab} \qquad g^{\frac{1}{2}} g_{ab} \qquad \text{e} \qquad \mathfrak{T}_{ab} \qquad g^{\frac{1}{2}} T_{ab.}$$

A densidade escalar mais simples que se pode formar a partir de g_{ab} é $g^{\frac{1}{2}}$, nomeadamente,

$$\mathfrak{L}\, g_{ab} \quad g^{\frac{1}{2}}, \tag{1.294}$$

onde $g^{\frac{1}{2}}$ será um funcional da variável g_{ab}.

Uma vez que

$$\frac{g}{g_{ab}} \quad gg^{ab}, \tag{1.295}$$

e, por isso,

$$\begin{aligned} \frac{g^{\frac{1}{2}}}{g_{ab}} \quad & \frac{1}{2}\frac{g}{g^{\frac{1}{2}}} g^{ab} \\ & \frac{1}{2} \quad g^{\frac{1}{2}} g^{ab} \\ & \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{ab}, \end{aligned} \tag{1.296}$$

a partir do que se deduz que

$$\mathfrak{L}^{ab} \quad \frac{\mathfrak{L}}{g_{ab}} \quad \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{ab}.$$

Obviamente, $\mathfrak{g}^{ab} \quad 0$ não serve como equações de campo. As identidades de (1.293) transformam-se em

$$_b\mathfrak{g}^{ab} \quad 0, \tag{1.297}$$

que são trivialmente satisfeitas, pois as derivadas covariantes de g^{ab} e de $g^{\frac{1}{2}}$ se anulam.

1.4.3.3. O Lagrangiano de Einstein

O Lagrangiano (1.294) não serve como Lagrangiano de uma teoria física. No entanto, a partir de g_{ab} e das suas derivadas, é possível formar outro escalar (bem mais complexo), o escalar de curvatura R. O Lagrangiano resultante é

$$\mathcal{L}_G \qquad g^{\frac{1}{2}} R \tag{1.298}$$

a que se chama *Lagrangiano de Einstein-Hilbert*, onde G refere o facto de se tratar do Lagrangiano para a gravitação. Usar-se-á a vírgula como notação para as derivadas parciais no sentido de simplificar a escrita. Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_G \qquad & g^{\frac{1}{2}} g^{cd} R_{cd} \\
& \mathfrak{g}^{cd} R^{e}_{ced} \\
& \mathfrak{g}^{cd} \quad {}^{e}_{cd,e} \quad {}^{e}_{ce,d} \quad {}^{f}_{cd}\,{}^{e}_{fe} \quad {}^{f}_{ce}\,{}^{e}_{fd} \\
& \mathfrak{g}^{cd} \ \Big[\tfrac{1}{2} g^{ef} \ g_{cf,d} \quad g_{df,c} \quad g_{cd,f} \ \Big]_{,e} \\
& \Big[\tfrac{1}{2} g^{ef} \ g_{cf,e} \quad g_{ef,c} \quad g_{ce,f} \ \Big]_{,d} \\
& \Big[\tfrac{1}{2} g^{fh} \ g_{ch,d} \quad g_{dh,c} \quad g_{cd,h} \ \Big]\Big[\tfrac{1}{2} g^{ei} \ g_{fi,e} \quad g_{ei,f} \quad g_{fe,i} \ \Big] \\
& \Big[\tfrac{1}{2} g^{fh} \ g_{ch,e} \quad g_{eh,c} \quad g_{ce,h} \ \Big]\Big[\tfrac{1}{2} g^{ei} \ g_{fi,d} \quad g_{di,f} \quad g_{fd,i} \ \Big] \ .
\end{aligned} \tag{1.299}$$

Este funcional forma-se a partir de g_{ab} e das suas primeiras e segundas derivadas,

$$\mathcal{L}_G \qquad \mathcal{L}_G \ g_{ab}, g_{ab,c}, g_{ab,cd} \ ,$$

onde g^{ab} e g (e consequentemente $\mathfrak{g}^{ab}$) são funções de g_{ab}.

$\mathcal{L}_G$ poderá ser considerado, também, um funcional de g^{ab}, $\mathfrak{g}^{ab}$ e $\mathfrak{g}_{ab}$ e das suas primeiras e segundas derivadas. No caso de g_{ab} serem as variáveis dinâmicas, a derivada de Euler-Lagrange fica

$$\frac{\mathcal{L}_G}{g_{ab}} \qquad \frac{\mathcal{L}_G}{g_{ab}} \quad \left(\frac{\mathcal{L}_G}{g_{ab,c}} \right)_{,c} \quad \left(\frac{\mathcal{L}_G}{g_{ab,cd}} \right)_{,cd} \tag{1.300}$$

e

$$\frac{\mathcal{L}_G}{g_{ab,cd}} \qquad g^{\frac{1}{2}} \Big[\tfrac{1}{2} \ g^{ac} g^{bd} \quad g^{ad} g^{bc} \qquad g^{ab} g^{cd} \Big]. \tag{1.301}$$

Através de cálculos extremamente extensos, prova-se ainda que

$$\mathcal{L}_G^{ab} \quad \frac{\mathcal{L}_G}{g_{ab}} \qquad\quad g^{\frac{1}{2}} G^{ab}, \tag{1.302}$$

e, assim, as equações de Euler-Lagrange conduzem às equações de campo no vácuo

$$g^{\frac{1}{2}} G^{ab} \quad 0, \tag{1.303}$$

que é o anulamento do tensor de Einstein. Com as identidades (11.18) vem

$$_{b}\left[\quad g^{\frac{1}{2}} G^{ab} \right] \quad 0 \qquad _{b}G^{ab} \quad 0, \tag{1.304}$$

que representam as identidades de Bianchi contraídas.

1.4.3.4. As equações gerais de campo

Até agora tratou-se das equações de campo no vácuo. Para obter as equações gerais de campo, assuma-se que há outros campos presentes, para além do campo gravitacional, que podem ser descritos por uma densidade Lagrangeana apropriada $\mathcal{L}_M$ - o Lagrangeano da matéria. O integral de acção é, então,

$$I \qquad \mathcal{L}_G \quad k\mathcal{L}_M \; d \quad , \tag{1.305}$$

onde k é a constante de ligação. Ambos os Lagrangeanos devem ser considerados como funcionais da métrica e suas derivadas e, assim, fazendo a variação em relação a g_{ab}, por exemplo, obtém-se

$$\frac{\mathcal{L}_G}{g_{ab}} \qquad g^{\frac{1}{2}} G^{ab} \tag{1.306}$$

e

$$\frac{\mathcal{L}_M}{g_{ab}} \qquad g^{\frac{1}{2}} T^{ab}, \tag{1.307}$$

onde a última equação define o *tensor de impulsão-energia* T^{ab} para o presente campo. Dividindo por $g^{\frac{1}{2}}$, as equações de campo ficam

$$G^{ab} \quad kT^{ab}, \tag{1.308}$$

em concordância com (1.277).

1.5. O tensor de impulsão-energia

Nesta secção, estudar-se-ão os três tensores de impulsão-energia mais importantes na relatividade geral, nomeadamente, para a *incoherent matter* ou poeira, para um fluido perfeito e para um campo electromagnético.

1.5.1. *Incoherent matter* ou poeira

Comece-se por considerar o tipo mais simples de campo material, nomeadamente, o campo de *incoherent matter* não interactiva ou poeira.

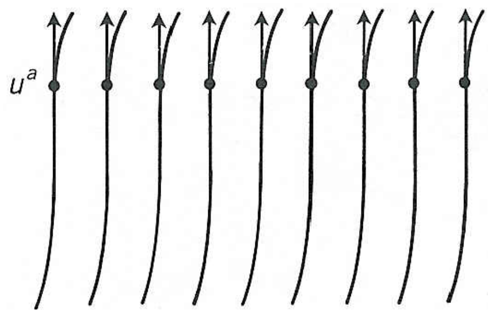

Figura 1.21. : As linhas de universo de partículas de poeira.

Um campo deste tipo pode ser caracterizado por duas quantidades: o campo de vectores 4-velocidade do fluxo

$$u^a \qquad \frac{dx^a}{d},$$

onde   é o tempo próprio ao longo da linha de universo de uma partícula de pó e um campo escalar

$$_0 \qquad _0 \; x$$

que descreve a densidade própria do fluxo, i.e., a densidade que será medida por um observador que se move com o fluxo. O tensor de segunda ordem mais simples que se pode obter a partir destas duas quantidades é

$$T^{ab} \quad {}_0 u^a u^b, \tag{1.309}$$

que é o tensor de impulsão energia para o campo material.

Veja-se como fica este tensor na relatividade restrita usando as coordenadas de Minkowski. O vector 4-velocidade é

$$u^a \quad 1, u \;, \tag{1.310}$$

onde $\quad 1 \quad u^2 \;\; ^{\frac{1}{2}}$. O tempo próprio é definido por

$$\begin{aligned} d\ ^2 \quad & ds^2 \quad {}_{ab} dx^a dx^b \\ & dt^2 \quad dx^2 \quad dy^2 \quad dz^2 \\ & dt^2\ 1 \quad u^2 \\ & {}^2 dt^2. \end{aligned} \tag{1.311}$$

Então, por (1.311), tem-se

$$T^{00} \quad {}_0 \frac{dx^0}{d} \frac{dx^0}{d} \quad {}_0 \frac{dt^2}{d\ ^2} \quad {}^2 \ {}_0, \tag{1.312}$$

Esta quantidade tem uma interpretação física simples. Antes de mais, na relatividade restrita, a massa de um corpo em movimento é superior, segundo o factor , à sua massa em repouso. Além disso, considerando um elemento de volume tridimensional em movimento, o seu volume diminui, segundo um factor , pela contracção de Lorentz. Então, do ponto de vista de um observador fixo em relação a um observador em movimento, a densidade diminui segundo um factor ^{2}. Assim, se um campo material de densidade própria $_0$ tem velocidade u em relação a um observador fixo, este medirá uma densidade igual a

$$^2 \ {}_0. \tag{1.313}$$

A componente T^{00} deverá ser interpretada como a densidade de energia relativista do campo material, uma vez que a única contribuição para a energia do campo é o movimento de matéria (note-se que será necessário o factor c^2 na definição (1.309) em unidades não relativistas).

Usando (1.310) e (1.313), as componentes de T^{ab} poderão ser escritas na forma

$$T^{ab} \quad \begin{bmatrix} 1 & u_x & u_y & u_z \\ u_x & u_x^2 & u_x u_y & u_x u_z \\ u_y & u_x u_y & u_y^2 & u_y u_z \\ u_z & u_x u_z & u_y u_z & u_z^2 \end{bmatrix} \qquad (1.314)$$

As equações que regem o movimento livre da acção de forças de um campo material de poeira podem ser escritas, de forma sucinta, como

$$_b T^{ab} \quad 0. \qquad (1.315)$$

Usando (1.314), no caso de $a \quad 0$, a equação fica

$$\frac{}{t} \quad \frac{}{x} \; u_x \quad \frac{}{y} \; u_y \quad \frac{}{z} \; u_z \quad 0,$$

coincidindo com a equação clássica de continuidade

$$\frac{}{t} \quad div \quad u \quad 0. \qquad (1.316)$$

Na dinâmica de fluidos clássica, esta equação expressa a conservação de matéria de desidade movendo-se com velocidade u. Uma vez que, na relatividade restrita, a matéria e a energia são o mesmo, a equação de conservação de energia para a poeira é $_b T^{0b} \quad 0$. Para $a \qquad 1,2,3$, as equações correspondentes são

$$\frac{}{t} \; u \quad \frac{}{x} \; u_x u \quad \frac{}{y} \; u_y u \quad \frac{}{z} \; u_z u \quad 0.$$

Usando (1.316), a equação pode ser escrita como

$$\left[\frac{u}{t} \quad u. \quad u \right] \quad 0 \qquad (1.317)$$

Comparando com a equação de movimento de Navier-Stokes para um fluido perfeito na dinâmica de fluidos clássica, nomeadamente,

$$\left[\frac{u}{t} \quad u. \quad u\right] \quad gradp \quad X, \tag{1.318}$$

onde p é a pressão no fluido e X a força por unidade de massa, verifica-se que (1.317) é equivalente a esta equação na ausência de pressão e de forças externas.

Verificou-se então que, o facto de que, na relatividade restrita, o tensor de impulsão-enregia ter divergência zero, é equivalente à existência de conservação de energia e de momento no campo material - daí o nome tensor de impulsão energia. Acrescente-se ainda que (1.315) é a lei de conservação local de impulsão-energia. Se se usar uma métrica de um espaço com curvatura, em relatividade geral, (1.315) será substituído por

$$_b T^{ab} \quad 0. \tag{1.319}$$

Faz-se a transição para a relatividade geral e, mais uma vez, define-se o tensor de impulsão-energia para *incoherent matter* por (1.309) e, usando o princípio da copulação mínima gravitacional, obtém-se (1.319) como a afirmação da lei de conservação.

1.5.2.Fluido Perfeito

Um fluido perfeito caracteriza-se por três quantidades: a 4-velocidade $u^a \quad \frac{dx^a}{d}$; o campo de densidade $_0 \quad _0 x$; e o campo escalar de pressão $p \quad p\, x$. No limite, uma vez que p se anula, um fluido perfeito reduz-se a *incoherent matter*. Isto sugere que se possa escrever o tensor de impulsão-energia para um fluido perfeito como

$$T^{ab} \quad _0 u^a u^b \quad pS^{ab} \tag{1.320}$$

para um tensor S^{ab} simétrico. Os únicos tensores de segunda ordem associados ao fluido são $u^a u^b$ e a métrica g^{ab}, pelo que o tensor mais simples que se pode formar é

$$S^{ab} = \alpha u^a u^b + \beta g^{ab}, \qquad (1.321)$$

em que α e β são constantes. Procedendo da mesma forma que anteriormente, em que se verificou que a lei de conservação $\nabla_b T^{ab} = 0$, em relatividade geral, usando coordenadas de Minkowski, se reduzia, num limite apropriado, à equação de continuidade (1.319) e à equação de Navier-Stokes (1.318) na ausência de forças sobre o corpo, resulta que $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Então, de (1.320) e (1.321) vem

$$T^{ab} = (\rho_0 + p)\, u^a u^b + p g^{ab}, \qquad (1.322)$$

que é a definição de tensor de impulsão-energia para um fluido perfeito. Usando, em relatividade geral, uma métrica de um espaço com curvatura, fica-se, novamente, com a expressão (1.319) para a lei de conservação. Na teoria geral, também se assume (1.322) como a definição de um fluido perfeito e (1.319) como as equações de conservação.

Os campos escalares p e ρ estão relacionados por uma equação de estado que rege o tipo de fluido perfeito em questão. Em geral, é uma equação da forma $p = p(\rho, T)$, onde T é a temperatura absoluta.

1.5.3. Equações de Maxwell

Nesta secção reformular-se-ão, agora na forma tensorial, as equações de Maxwell para um campo electromagnético. Reescrevendo-as, em relatividade geral, usando coordenadas de Minkowski e unidades de

Heavyside-Lorentz, com $c \quad 1$, obtém-se que as equações de Maxwell, no vácuo, para um campo electromagnético são dois pares de equações: as equações de fonte

$$div\ E \tag{1.323}$$

$$rot\ B \quad \frac{E}{t} \quad j, \tag{1.324}$$

e as equações internas

$$div\ B \quad 0 \tag{1.325}$$

$$rot\ E \quad \frac{B}{t} \quad 0, \tag{1.326}$$

onde E é o campo eléctrico e B a indução magnética, é a densidade de carga e j a densidade de corrente. As quantidades e j não podem ser expressas de forma independente, pois, derivando (1.323) em relação a t, obtém-se (lembrando que $\frac{}{t}$ comuta com $\frac{}{x}$, $\frac{}{y}$ e $\frac{}{z}$)

$$div \frac{E}{t} \quad \frac{}{t},$$

e, fazendo a divergência de (1.324) vem

$$div \frac{E}{t} \quad divj.$$

Então, e j satisfazem a equação de continuidade

$$\frac{}{t} \quad divj \quad 0. \tag{1.327}$$

Interpretando j como uma corrente convectiva, i.e., $j \quad u$, onde u é o campo velocidade da matéria com densidade de carga , tem-se que (1.327) e (1.326) são idênticas, i.e., (1.327) é idêntica à equação de continuidade da dinâmica de fluidos.

Para escrever estas equações numa forma tensorial, defina-se um tensor anti-simétrico F^{ab} - o tensor do campo electromagnético ou o tensor de Maxwell - como

$$F^{ab} \quad \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.328)$$

e a densidade de corrente ou o 4-vector fonte j^a por

$$j^a \qquad ,j \qquad (1.329)$$

Então, as equações de fonte e as equações internas poder-se-ão escrever na forma

$$_bF^{ab} \quad j^a, \qquad (1.330)$$

$$_aF_{bc} \quad _cF_{ab} \quad _bF_{ca} \quad 0. \qquad (1.331)$$

O tensor anti-simétrico F_{ab} permite que (1.331) se escreva de uma forma mais sucinta como

$$_aF_{bc} \quad 0. \qquad (1.332)$$

A equação de continuidade (1.327) fica

$$_aj^a \quad 0. \qquad (1.333)$$

1.5.4. O tensor de impulsão-energia de Maxwell

Obter-se-á o tensor de impulsão-energia para um campo electromagnético, através do método variacional. Para simplificação, trabalhar-se-á no vácuo, em relatividade geral, nas coordenadas de Minkowski numa região onde j^a se anula. Considerando o Lagrangeano para o campo electomagnético definido por

$$\mathcal{L}_E \quad _a, F_{ab} \quad \frac{1}{4}\left[\ \frac{1}{2}F_{ab}F^{ab} \quad _{a,b} \quad _{b,a} \ F^{ab}\right], \qquad (1.334)$$

onde $_a$ é o 4-potencial definido por $^a \quad ,A$, com A o vector potencial e o potencial escalar tal que

$$E \quad grad \quad \frac{A}{t}$$

e

$$B \quad rotA.$$

Então,

$$\frac{\mathcal{L}_E}{a} \quad \frac{\mathcal{L}_E}{a} \quad \left(\frac{\mathcal{L}_E}{a,b}\right)_{,b}$$

$$0 \quad \frac{1}{4} \; F^{ab} \quad F^{ba} \quad {}_{,b}$$

e as equações de campo correspondentes a uma variação com respeito a $\;_a$ ficam

$$F^{ab} \quad F^{ba} \quad {}_{,b} \quad 0. \qquad (1.335)$$

Do mesmo modo,

$$\frac{\mathcal{L}_E}{F_{ab}} \quad \frac{\mathcal{L}_E}{F_{ab}}$$

$$\frac{}{F_{ab}} \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2} \; {}^{ce} \; {}^{df} F_{cd} F_{ef} \quad {}^{ce} \; {}^{df} \quad {}_{c,d} \quad {}_{d,c} \; F_{ef} \Big]$$

$$\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2} \; {}^{ae} \; {}^{bf} F_{ef} \quad \frac{1}{2} \; {}^{ca} \; {}^{db} F_{cd} \quad {}^{ca} \; {}^{db} \quad {}_{c,d} \quad {}_{d,c} \Big]$$

$$\frac{{}^{ac} \; {}^{bd}}{4} \quad F_{cd} \quad {}_{c,d} \quad {}_{d,c}$$

e as equações de campo correspondentes a uma variação de F_{ab} ficam

$$F_{ab} \quad {}_{a,b} \quad {}_{b,a} \qquad (1.336)$$

Esta última equação define F_{ab} em função do 4-potencial e mostra que F_{ab} é anti-simétrico. As equações internas são satisfeitas e (1.335) reduz-se a

$$F^{ab}_{,b} \quad 0,$$

sendo as equações de fonte. O resultado (1.336) também permite reescrever o Lagrangeano como

$$\mathcal{L}_E \quad \frac{1}{8} \; {}^{ac} \; {}^{bd} F_{ab} F_{cd}. \qquad (1.337)$$

Fazendo agora a transição para a teoria geral, assume-se que

$$L_E \quad \frac{g^{\frac{1}{2}}}{8} g^{ac} g^{bd} F_{ab} F_{cd}, \qquad (1.338)$$

e a definição (1.336) de F_{ab} em termos de $_a$. O factor $g^{\frac{1}{2}}$ está presente para assegurar que $\mathcal{L}_E$ é uma densidade escalar (note-se que, na relatividade restrita, em coordenadas de Minkowski, este factor se reduz a 1). Então,

$$\frac{\mathcal{L}_E}{g^{ab}} \quad \frac{g^{\frac{1}{2}}}{4}\left(g^{cd} F_{ac} F_{bd} \quad \tfrac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd}\right). \qquad (1.339)$$

O análogo a (1.307) para a métrica contravariante é

$$\frac{\mathcal{L}_E}{g^{ab}} \quad g^{\frac{1}{2}} T_{ab}. \qquad (1.340)$$

As duas últimas equações conduzem à definição do tensor de impulsão-energia de Maxwell T_{ab} nas regiões em que $j^a \quad 0$

$$T_{ab} \quad \frac{1}{4}\left(g^{cd} F_{ac} F_{bd} \quad \tfrac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd}\right). \qquad (1.341)$$

Então, em unidades relativistas, $k \quad 8$ e as equações de campo nas regiões livres da fonte são as equações de Einstein-Maxwell que se apresentam como

$$G_{ab} \quad 2 g^{cd} F_{ac} F_{bd} \quad \tfrac{1}{2} g_{ab} F_{cd} F^{cd}. \qquad (1.342)$$

Vejam-se algumas das componentes de T_{ab} em Relatividade Restrita, em coordenadas de Minkowski. A **densidade de energia** do campo electromagnético é dada por

$$T_{00} \quad \frac{1}{8} \; \mathbf{E}^2 \quad \mathbf{B}^2 \;, \qquad (1.343)$$

que respeita a expressão usual para a densidade de energia em electrodinâmica. A **densidade de momento** é

$$T_{01}, T_{02}, T_{03} \quad \frac{1}{4} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \qquad (1.344)$$

onde o vector **E** x **B** é o vector de Poynting da electrodinâmica e representa a densidade de momento num campo electromagnético. Verifica-se que as equações de Maxwell implicam que

$$_{b}T^{ab} \quad 0.$$

Então, as equações de campo (em unidades relativistas) são

$$G_{ab} \quad 8 \;\; T_{ab} \tag{1.345}$$

que poderão ser vistas sobre três perspectivas.

1. As equações de campo são equações diferenciais que permitem determinar o tensor da métrica, g_{ab}, a partir de um dado tensor de impulsão-energia, T_{ab}. Assim, as equações são lidas da direita para a esquerda. É uma forma, do ponto de vista de Mach, de ver as equações uma vez que se especifica a distribuição de matéria e depois se resolvem as equações para obter a geometria. É também uma forma natural de olhar as equações de Einstein-Maxwell. O caso mais importante das equações é quando $T_{ab} \quad 0$, no qual se procuram encontrar as soluções no vácuo.

2. As equações de campo são equações a partir das quais o tensor de impulsão-energia corresponde a um dado tensor da métrica g_{ab}. Desta forma, as equações lêem-se da esquerda para a direita. Inicialmente, pensava-se que esta era uma forma eficaz para determinar tensores de impulsão-energia. Escolhidas dez funções das coordenadas, nomeadamente, o simétrico g_{ab}, calcula-se G_{ab} e obtém-se T_{ab} por (1.345). No entanto, na prática, muito raramente isto é útil, pois os resultados para T_{ab} são habitualmente irrealistas, não obedecendo às condições de energia. Em particular, é frequente obter que a densidade de energia é negativa nalguma região, o que é impossível, pois o facto de a densidade de energia ser positiva é fundamental na teoria gravitacional.

3. As equações de campo consistem em dez equações relacionando vinte quantidades, nomeadamente, as dez componentes de g_{ab} e as dez componentes de T_{ab}. Deste ponto de vista, as equações de campo deverão

ser vistas como restrições na escolha simultânea de g_{ab} e T_{ab}. Esta aproximação é usada quando é possível especificar parcialmente a geometria e o tensor de impulsão-energia a partir de considerações físicas e então as dez equações são usadas para determinar ambas as quantidades.

1.6 A solução de Schwarzchild

1.6.1.Soluções estacionárias

Vejam-se, agora, as soluções das equações de campo no vácuo no caso mais simples, nomeadamente, no caso de haver simetria esférica. Note-se a diferença entre soluções estacionárias e soluções estáticas. De uma forma simples, uma solução é estacionária se é independente do tempo. Não significa isto que a solução não seja evolucionária, mas apenas que o tempo não aparece explicitamente. Por outro lado, uma solução estática nunca poderá ser evolucionária. Neste caso, nada mudaria se, em qualquer instante, se voltasse atrás no tempo, i.e., há simetria em relação a qualquer instante que se considere como origem. Veja-se como exemplo o movimento de um gás num tubo.

Antes $t \quad t_1$ Depois $t \quad t_2 \quad t_1$

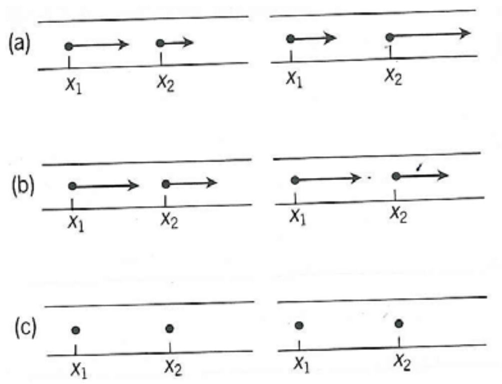

Figura 1.22. : Duas partículas de gás num tubo num fluido (a) não estacionário, (b) estacionário e (c) estático.

Se a origem da emissão do gás depende do tempo, então o movimento será não estacionário. Se o gás se move com velocidade constante em cada ponto do tubo, então o movimento é estacionário. Se a velocidade do gás é sempre nula, o sistema será estático.

Uma métrica será estacionária, se existe um sistema especial de coordenadas, no qual ela seja claramente independente do tempo, i.e.,

$$\frac{g_{ab}}{x^0} \quad 0, \qquad (1.346)$$

onde x^0 é a coordenada referente ao tempo. Num sistema de coordenadas arbitrário, a métrica dependerá explicitamente de todas as coordenadas, pelo que será necessário traduzir (1.346) de uma forma independente das coordenadas. Definindo-se um campo de vectores

$$X^a \quad {}^{a}_{0} \qquad (1.347)$$

no sistema de coordenadas especial, então, por (1.346)

$$\begin{aligned} L_X g_{ab} \quad & X^c g_{ab,c} \quad g_{ac} X^c_{,b} \quad g_{bc} X^c_{,a} \\ & {}^{c}_{0} g_{ab,c} \quad g_{ab,0} \quad 0. \end{aligned}$$

$L_X g_{ab}$ é um tensor pelo que, se se anula num sistema de coordenadas, anular-se-á em todos. Logo $L_X g_{ab} \quad 0$ define uma métrica estacionária de forma independente das coordenadas. Ao campo de vectores X, chama-se campo de vectores Killing (campo de vectores no qual a derivada de Lie é nula).

1.6.2 Campos de vectores ortogonais à hipersuperfície

Para se poder falar de soluções estáticas independentemente do sistema de coordenadas que se usa, introduzir-se-á o conceito de campo de vectores ortogonais à hipersuperfície. Comece-se pela equação de uma família de hipersuperfícies dada por

$$f \, x^a \qquad , \tag{1.348}$$

onde diferentes elementos correspondem a diferentes valores de .

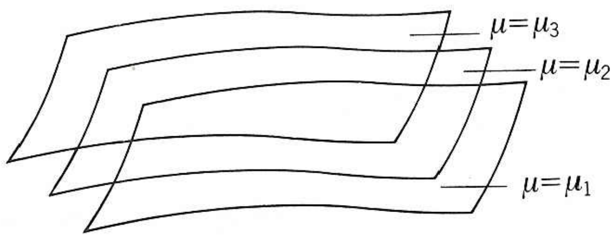

Figura 1.23. : Família de hipersuperfícies rotulada por .

Considerando dois pontos vizinhos P e Q com coordenadas x^a e $x^a \quad dx^a$, respectivamente, numa das hipersuperfícies a que se chama S.

Uma vez que $x^a \quad dx^a$ se encontra em S, ter-se-á, usando o desenvolvimento de Taylor em (1.348),

$$f \, x^a \quad dx^a \qquad f \, x^a \qquad \frac{f}{x^a} dx^a .$$

Subtraindo, termo a termo, (1.348) a esta equação, obtém-se

$$\frac{f}{x^a} dx^a \quad 0 \qquad (1.349)$$

em P. Se se definir o campo de vectores covariante n_a para a família de hipersuperfícies por

$$n_a \quad \frac{f}{x^a}, \qquad (1.350)$$

então, (1.349) fica

$$n_a dx^a \quad g_{ab} n^a dx^b \quad 0$$

em P, o que permite concluir que n^a é ortogonal ao campo de vectores contravariante infinitesimal dx^a. Uma vez que, por construção, dx^a se encontra em S, vem que n^a é ortogonal a S sendo chamado o campo de vectores normal a S em P.

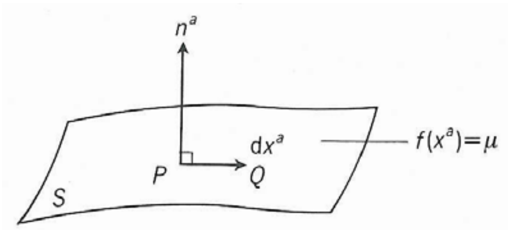

Figura 1.24. : Campo de vectores ortogonais n^a num ponto P.

Qualquer outro campo de vectores X^a é ortogonal à hipersuperfície se for ortogonal, em todos os pontos, à família das hipersuperfícies e será proporcional a n^a também em qualquer ponto, i.e.,

$$X^a \qquad x \; n^a \qquad (1.351)$$

para um dado factor de proporcionalidade   que, geralmente, varia de ponto para ponto. Assim, as órbitas de X^a são ortogonais à família das hipersuperfícies.

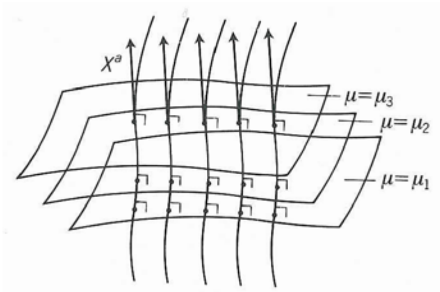

Figura 1.25. : Campo de vectores X^a ortogonal à hipersuperfície.

De (1.351) e (1.350), vem que a condição de ortogonalidade à hipersuperfície também poderá ser escrita como

$$X_a \qquad f_{,a}, \tag{1.352}$$

e

$$X_a \quad {}_b X_c \qquad f_{,a} \quad {}_{,b} f_{,c} \qquad {}^2 f_{,a} f_{,cb}.$$

Tomando a parte anti-simétrica desta equação e notando que, no segundo membro, o primeiro e segundo termos são simétricos em a e c e em b e c, respectivamente, pelo que a sua parte anti-simétrica se anula, vem que

$$X_a \quad {}_b X_c \qquad 0 \tag{1.353}$$

que também se pode escrever como

$$X_a \quad {}_b X_c \qquad 0. \tag{1.354}$$

Qualquer campo de vectores ortogonal à hipersuperfície satisfaz, então, a expressão (1.354).

Veja-se, agora, a implicação inversa - qualquer campo de vectores não nulos de Killing que satisfaz (1.354) é, necessariamente, ortogonal à hipersuperfície. Sendo X^a um vector de Killing, verifica-se que

$$L_X g_{ab} \quad {}_b X_a \quad {}_a X_b \quad 0.$$

A mudança de índices na derivada covariante de X_a leva a que

$$ {}_a X_b \quad {}_b X_a . \qquad (1.355)$$

Usando esta igualdade, os seis termos de (1.354) reduzem-se a três:

$$X_a \; {}_b X_c \quad X_c \; {}_a X_b \quad X_b \; {}_c X_a \quad 0.$$

Contraindo com X^c e fazendo $X^2 \quad X^a X_a$, tem-se

$$X_a X^c \; {}_b X_c \quad X^2 \; {}_a X_b \quad X_b X^c \; {}_c X_a \quad 0,$$

ou, usando (1.355),

$$X_a X^c \; {}_b X_c \quad X^2 \; {}_a X_b \quad X_b X^c \; {}_a X_c \quad 0.$$

Trocando os índices mudos c covariantes com os contravariantes e usando (1.355) no segundo termo, fica

$$X_a X_c \; {}_b X^c \quad X^2 \; {}_b X_a \quad X_b X_c \; {}_a X^c \quad 0.$$

Somando as duas últimas equações, obtém-se

$$X_a \; {}_b X^2 \quad X_b \; {}_a X^2 \quad X^2 \quad {}_a X_b \quad {}_b X_a \quad 0,$$

ou, uma vez que X^2 é um campo escalar e os termos dentro de parêntesis que envolvem a conexão se anulam,

$$X_a \; {}_b X^2 \quad X_b \; {}_a X^2 \quad X^2 \quad {}_a X_b \quad {}_b X_a \quad 0.$$

Escrevendo esta equação na forma

$$X_a \; {}_b X^2 \quad X_b \; {}_a X^2 \quad X^2 \; {}_b X_a \quad X^2 \; {}_a X_b ,$$

ou, de maneira equivalente, dividindo por X^4,

$$ {}_a \left(\frac{X_b}{X^2} \right) \quad {}_b \left(\frac{X_a}{X^2} \right), \qquad (1.356)$$

pois X^a, por hipótese não é nulo, pelo que $X^2 \quad 0$. Esta última equação requer que o termo dentro de parêntesis seja o gradiente de um campo escalar, por exemplo f, i.e.,

$$\frac{X_a}{X^2} \quad f_{,a}, \qquad (1.357)$$

e, finalmente,

$$X_a \quad X^2 f_{,a}. \qquad (1.358)$$

Esta é a condição de ortogonalidade à hipersuperfície (1.352) com X^2.

1.6.3 Soluções estáticas

Se uma solução é estacionária, então, num sistema de coordenadas especial, a métrica será independente do tempo, mas no elemento linha aparecerão termos do tipo $dx^0 dx$. Se a métrica é estática, espera-se que estes termos desapareçam. Veja-se. Considere-se o intervalo entre dois acontecimentos x^0, x^1, x^2, x^3 e $x^0 \quad dx^0, x^1 \quad dx^1, x^2, x^3$ no sistema especial de coordenadas. Então,

$$ds^2 \quad g_{00} \; dx^0 \;\; ^2 \quad 2g_{01} dx^0 dx^1 \quad g_{11} \; dx^1 \;\; ^2, \qquad (1.359)$$

onde g_{ab} depende apenas de $x \qquad 1,2,3$, pois, sendo a métrica estacionária, $\frac{g_{ab}}{x^0} \quad 0$. Andando para trás no tempo e fazendo

$$x^0 \quad x'^0 \quad x^0, \qquad (1.360)$$

g_{ab} mantém-se inalterado, mas ds^2 fica

$$ds^2 \quad g_{00} \; dx^0 \;\; ^2 \quad 2g_{01} dx^0 dx^1 \quad g_{11} \; dx^1 \;\; ^2. \qquad (1.361)$$

O facto de se assumir que a solução é estática, significa que ds^2 é invariante quando se anda para trás no tempo a partir de qualquer instante que se considere para sua origem e, por isso, fazendo (1.359) igual a (1.361), obtém-se que g_{01} se anula. Da mesma forma g_{02} e g_{03} se anularão, pelo que não haverá termos do tipo $dx^0 dx$ no elemento linha no sistema de coordenadas especial.

Veja-se o que acontece à condição (1.358), condição de ortogonalidade à hipersuperfície, num espaço-tempo estacionário e num sistema de coordenadas especial tal que $X^a = \delta^a_0$. Então,

$$X_a = g_{ab}X^b = g_{ab}\,\delta^b_0 = g_{0a}$$

e

$$X^2 = X_a X^a = g_{0a}\,\delta^a_0 = g_{00}.$$

Logo, de (1.358), resulta

$$g_{0a} = g_{00} f_{,a} \qquad (1.362)$$

para um campo escalar f. Quando $a = 0$, vem $f_{,0} = 1$ e, da integração, obtém-se

$$f = x^0 + h(x^\alpha),$$

onde h é uma função arbitrária de coordenadas espaciais. Considere-se a transformação de coordenadas definida por

$$x^0 \rightarrow x'^0 = x^0 - h(x^\alpha) \quad \text{e} \quad x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha . \qquad (1.363)$$

Então, o novo sistema de coordenadas é

$$X'^a = \delta^a_0, \qquad (1.364)$$

$$g'_{ab,0} = 0, \qquad (1.365)$$

$$g'_{00} = g_{00}, \qquad (1.366)$$

$$g'_{0\alpha} = 0. \qquad (1.367)$$

Esta última equação permite concluir que não se tem termos do tipo $dx^0 dx^\alpha$ pelo que a solução é estática. Então, estabelece-se a seguinte definição:

Um espaço-tempo é estático se e só se admite um campo de vectores ortogonal à hipersuperfície em que $X^a = \delta^a_0$ (*um campo de vectores de Killing*).

Também se pode estabelecer o resultado

Num espaço-tempo estático, existe um sistema de coordenadas especial (adaptado a um campo de vectores de Killing) no qual a métrica é independente do tempo e não aparecem termos cruzados envolvendo o tempo no elemento linha, i.e., $g_{0} \qquad 0.$

1.6.4. Soluções com simetria esférica

A simetria esférica pode ser definida de um modo rigoroso, através dos campos de vectores de Killing, da seguinte forma:

Um espaço-tempo possui simetria esférica se e só se admite três campos de vectores de Killing linearmente independentes, X^a, *cujas órbitas são fechadas e satisfazem*

$$X^1, X^2 \quad X^3, \qquad X^2, X^3 \quad X^1, \qquad X^3, X^1 \quad X^2.$$

Então, existe um sistema de coordenadas especial, no qual os vectores de Killing tomam a forma standard expressa do seguinte modo:

Num espaço-tempo com simetria esférica, existe um sistema de coordenadas x^a *(chamado cartesiano) no qual os campos de vectores de Killing são do tipo*

$$X^0 \quad 0,$$

$$X \qquad x \;, \qquad\qquad .$$

A quantidade depende de três parâmetros que especificam três rotações do tipo espaço. Intuitivamente, a simetria esférica leva à existência de um ponto privilegiado, a origem O, em torno do qual o sistema é invariante mediante a acção de rotações espaciais. Se se fixar um instante e considerar um ponto P á distância a de O, as rotações espaciais farão com que P descreva uma esfera centrada em O. Podem introduzir-se, na esfera, da forma usual, duas coordenadas: uma axial e uma azimutal . Tomando Q como a perpendicular de P em relação ao plano $z \quad 0$, é o ângulo que OQ faz com o semi-eixo positivo de ox e o ângulo que OP faz com o semi-eixo positivo de oz.

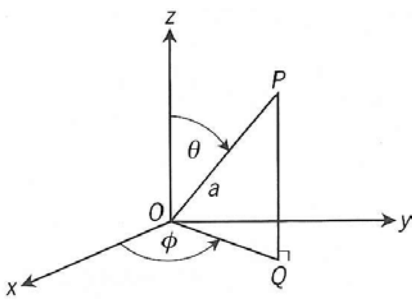

Figura 1.26 :As coordenadas esféricas e .

Todos os pontos na esfera verificarão

$$0 \qquad , \tag{1.368}$$

$$. \tag{1.369}$$

e o elemento linha da esfera é

$$ds^2 \quad a^2 \; d \;^2 \quad sen^2 \; d \;^2 \; . \tag{1.370}$$

É então natural que, em quatro dimensões, o ds^2 tenha termos envolvendo t e a coordenada radial r tal que se reduza à forma (1.370) quando t e r forem constantes. A simetria esférica requer que o elemento linha não varie quando e variam pelo que e apenas aparecem no elemento linha na forma $d \;^2 \quad sen^2 \; d \;^2$. Usando um argumento análogo ao usado no início da subsecção 1.5.3, não poderão surgir termos em $d \; d$, pois a métrica deverá manter-se invariante quer para as reflexões

(1.371)

quer para as reflexões

. (1.372)

O que se pretende verificar é que existe um sistema de coordenadas especial

$$x^a \quad x^0,x^1,x^2,x^3 \quad t,r,\ ,$$

no qual o elemento linha tem a forma

$$ds^2 \quad Adt^2 \quad 2Bdtdr \quad Cdr^2 \quad D\ d^{\ 2} \quad sen^2\ d^{\ 2}\ ,$$ (1.373)

onde A, B, C e D são funções indeterminadas de t e r, i.e.,

$$A \quad A\ t,r\ , \qquad B \quad B\ t,r\ , \qquad C \quad C\ t,r \qquad \text{e} \qquad D \quad D\ t,r\ .$$

Introduzindo uma nova coordenada radial pela transformação

$$r \quad r \quad D^{\frac{1}{2}},$$

a expressão (1.373) fica

$$ds^2 \quad A\ \ t,r\ \ dt^2 \quad 2B\ \ t,r\ \ dtdr \quad C\ \ t,r\ \ dr^2 \quad r^{\ 2}\ d^{\ 2} \quad sen^2\ d^{\ 2}\ .$$

(1.374)

Considere-se o diferencial

$$A\ \ t,r\ \ dt \quad B\ \ t,r\ \ dr\ .$$

Pela teoria das equações diferenciais ordinárias, pode sempre multiplicar-se este por um factor de integração, por exemplo $I \quad I\ t,r$, de forma a transformar o diferencial num diferencial exacto. Use-se esta propriedade para definir uma nova coordenada de tempo t requerendo-se que

$$dt \quad I\ t,r \quad A\ \ t,r\ \ dt \quad B\ \ t,r\ \ dr\ \ .$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtém-se

$$dt^{\ 2} \quad I^2\ A^{\ 2}dt^2 \quad 2A\ B\ dtdr \quad B^{\ 2}dr^{\ 2}\ \ ,$$

e, então,

$$A\,dt^2 - 2B\,dtdr = A^{-1}I^2dt^2 - A^{-1}B^2dr^2,$$

e o elemento linha (1.374) fica

$$ds^2 = A^{-1}I^2dt^2 - \left(C + A^{-1}B^2\right)dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\phi^2\right).$$

Definindo duas novas funções ν e λ por

$$A^{-1}I^2 = e^{\nu} \qquad (1.375)$$

e

$$C + A^{-1}B^2 = e^{\lambda} \qquad (1.376)$$

obtém-se

$$ds^2 = e^{\nu}dt^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\phi^2\right), \qquad (1.377)$$

onde

$$\nu = \nu(t,r) \quad \text{e} \quad \lambda = \lambda(t,r).$$

As definições de ν e λ em (1.375) e (1.376) são dadas em termos de exponenciais, uma vez que sendo sempre positivas, garantem a assinatura da métrica igual a -2. Aliás, o ds^2 associado a uma métrica de dimensão quatro, com simetria esférica de assinatura -2, é dado na forma canónica por (1.377).

1.6.5. A solução de Schwarzchild

Usar-se-ão, agora, as equações de campo de Einstein no vácuo para determinar as funções ν e λ em (1.377). A métrica covariante é

$$g_{ab} = diag\left(e^{\nu},\ -e^{\lambda},\ -r^2,\ -r^2sen^2\theta\right) \qquad (1.378)$$

e, uma vez que a métrica é diagonal, a sua forma contravariante vem

$$g^{ab} = diag\left(e^{-\nu},\ -e^{-\lambda},\ -r^{-2},\ -r^{-2}sen^{-2}\theta\right). \qquad (1.379)$$

Usando o ponto e a linha para representar as derivadas em relação a t e a r, respectivamente, as componentes não nulas do tensor de Einstein misto são

$$G_0{}^0 \quad e \left(\frac{}{r} \quad \frac{1}{r^2}\right) \quad \frac{1}{r^2}, \qquad (1.380)$$

$$G_0{}^1 \quad e \quad r^{1} \quad e \quad G_1{}^0, \qquad (1.381)$$

$$G_1{}^1 \quad e \left(\frac{}{r} \quad \frac{1}{r^2}\right) \quad \frac{1}{r^2}, \qquad (1.382)$$

$$G_2{}^2 \quad G_3{}^3$$

$$\frac{1}{2}e \left(\frac{}{2} \quad \frac{}{r} \quad \frac{}{r} \quad \frac{^2}{2} \quad\right) \quad \frac{1}{2}e \left(\quad \frac{^2}{2} \quad \frac{}{2}\right). \qquad (1.383)$$

As identidades de Bianchi, ${}_bG_a{}^b \quad 0$, mostram que a equação (1.383) se anula, se as equações (1.380), (1.381) e (1.382) se anularem.

Então, há três equações independentes para resolver, nomeadamente,

$$e \left(\frac{}{r} \quad \frac{1}{r^2}\right) \quad \frac{1}{r^2} \quad 0, \qquad (1.384)$$

$$e \left(\frac{}{r} \quad \frac{1}{r^2}\right) \quad \frac{1}{r^2} \quad 0, \qquad (1.385)$$

$$0. \qquad (1.386)$$

Somando (1.384) e (1.385), obtém-se

$$0$$

e, integrando esta última vem que

$$h \; t \;, \qquad (1.387)$$

onde h é uma função arbitrária de integração. é função apenas de r, por (1.386) e, então, (1.384) é uma equação diferencial ordinária que se pode escrever como

$$e \quad re \quad 1,$$

ou, de forma equivalente, como

$$re \quad 1.$$

Integrando, obtém-se

$re \quad r$ *constante*.

Escolhendo a constante de integração igual a $2m$ (apenas por conveniência), vem que

$$e \quad 1 \quad 2m/r \quad ^{1}. \qquad (1.388)$$

Então, por (1.387) e (1.388), a métrica reduz-se a

$$g_{ab} \quad diag\left[e^{h\ t}\ 1 \quad 2m/r\ , \quad 1 \quad 2m/r \quad ^{1},\ r^{2},\ r^{2}sen^{2} \quad \right]. \qquad (1.389)$$

Transformando-se a coordenada tempo, $t \quad t$, onde t se determina pela relação

$$t \quad \int_{c}^{t} e^{\frac{1}{2}h\ u}\, du \qquad (1.390)$$

em que c é uma constante qualquer. Então, a única componente da métrica que muda é

$$g_{00} \quad 1 \quad 2m/r\ .$$

Assim, conclui-se que é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas, no qual a solução mais geral, com simetria esférica das equações de campo de Einstein no vácuo é

$$ds^{2} \quad 1 \quad 2m/r\ dt^{2} \quad 1 \quad 2m/r \quad ^{1}dr^{2} \quad r^{2}\ d \quad ^{2} \quad sen^{2}\ d \quad ^{2}\ . \qquad (1.391)$$

Este elemento linha é o elemento linha de Schwarzchild.

1.6.6 Propriedades da solução de Schwarzchild

Veja-se o que acontece na região exterior, $r \quad 2m$, onde as coordenadas t e r são, respectivamente, do tipo tempo e do tipo espaço. Por (1.391), vem que $g_{ab,0} \quad 0$ sendo a solução estacionária. Além disso, uma vez que

$$X_{a} \quad g_{ab}X^{b} \quad g_{ab}\ {}^{b}_{0} \quad g_{0a} \quad g_{00}\ {}^{0}_{a} \quad 1 \quad 2m/r, 0, 0, 0\ ,$$

X^{a} é ortogonal à hipersuperfície, i.e., $X_{a} \quad f_{,a}$, com

$$X^2 \quad g_{00} \quad \text{e} \quad f\, x^a \quad t \quad \textit{constante},$$

a solução é estática.

Este resultado é inesperado, porque a teoria de simetria esférica de Newton não está relacionada com a dependência do tempo.

Tomando o limite de (1.391) quando r , obtém-se a métrica do espaço plano da Relatividade Restrita em coordenadas esféricas polares, nomeadamente,

$$ds^2 \quad dt^2 \quad dr^2 \quad r^2\; d\;^2 \quad sen^2\; d\;^2 \; . \qquad (1.392)$$

Mostra-se assim
que, no vácuo, uma solução com simetria esférica é necessariamente assimptoticamente plana.

Interpretando a solução de Schwarzchild como devida a uma partícula situada na origem, então a constante m é, simplesmente, a massa da partícula em unidades relativistas. De (1.391) vem que m tem as dimensões do comprimento. É, por vezes, conhecida como a massa geométrica e é dada por $m \quad \frac{GM}{c^2}$.

Em resumo, a solução de Schwarzchild possui as seguintes propriedades:

(i) tem simetria esférica;

(ii) é estacionária;

(iii) é estática   é simétrica em relação ao tempo e invariante mediante translação do tempo;

(v) é assimptoticamente plana;

(vi) tem massa geométrica $m \quad \frac{GM}{c^2}$.

CAPÍTULO 2

Embora na Mecânica Clássica a teoria da elasticidade tenha já uma longa história que remonta ao século XVII e à lei de Hooke, o seu desenvolvimento, na Relatividade Geral, teve início bastante mais tarde. Foi no final dos anos cinquenta que se sentiu necessidade, pela primeira vez, de desenvolver esta teoria com a antena de Weber para detecção de ondas gravitacionais que obrigava a um conhecimento da forma como estas ondas interagiam com sólidos elásticos. Para esta aplicação, a versão linear da equação de Einstein, tratada a partir da teoria Newtoniana, foi suficiente. Esta aproximação ao campo fraco foi usada por Weber e foi, posteriormente, desenvolvida por Dyson, entre outros. Após várias tentativas mal sucedidas, como a reformulação do formalismo de Hergloz por De Witt e as teorias de Rayner e Bennoun, uma completa teoria não linear da elasticidade adaptada à Relatividade Geral foi apresentada, em 1972, por Carter e Quintana. Esta teoria é ainda hoje uma referência. No entanto, como mais tarde foi referido por Carter, a estrutura teórica base da sua teoria já havia sido dada por Souriau, num trabalho que passou despercebido. Precedendo Carter e Quintana, esteve Maugin com grandes contribuições que incluem o desenvolvimento de uma teoria do meio elástico polarizável, importante para a modelação realista de estrelas de neutrões, uma vez que se crê que nestas há fortes campos gravitacionais. Em 1980, Carter também discute este assunto. Mais recentemente, a teoria da elasticidade na Relatividade Geral foi reconsiderada por Magli e Kijowski, que enfatizam o carácter *gauge* da teoria, e por Christodoulou. Recentemente, em 2003, Beig e Schmidt provaram alguns teoremas de existência e unicidade.

Esta teoria é usada para estudar o modelo das crostas elásticas das estrelas de neutrões a que, no capítulo 3, se fará referência.

O trabalho aqui desenvolvido tem por base o artigo *Elastic stars in general relativity*: *I. Foudations and equilibrium models*, de Max Karlovini e Lars Samuelson, do Departamento de Física da Universidade de Estocolmo, Suécia.

2.1. ELASTICIDADE CLÁSSICA

2.1.1. Desenvolvimento Histórico

A teoria da elasticidade estuda o comportamento de corpos elásticos sob a acção de forças. Um corpo é dito elástico, se possui a propriedade de recuperar a sua forma inicial quando há a remoção das forças que originavam a deformação. A propriedade elástica caracteriza-se, matematicamente, por relações entre forças e deformações. De entre estas relações, uma lei linear que resulta da generalização da lei de Hooke é de importância fundamental. A lei de Hooke afirma que a extensão de corpos elásticos, produzida pela acção de forças, é proporcional a estas. Num trabalho independente deste, uma lei idêntica foi descoberta por Mariotte, em 1680. Jack Bernoulli, Daniel Bernoulli, Euler e Coulomb são nomes que ficaram ligados ao estudo desta lei.

Durante os 150 anos que se seguiram à descoberta da lei de Hooke, em 1660, o desenvolvimento da ciência que estudava a elasticidade resultou de uma síntese de soluções de problemas concretos. Isto originou, no início do século XIX, uma teoria fragmentada da curvatura de vigas, uma teoria incompleta da torsão, uma teoria rudimentar da estabilidade das colunas e alguns resultados isolados na curvatura e oscilação de chapas.

A primeira tentativa de deduzir equações gerais do equilíbrio e oscilação de sólidos elásticos foi realizada por Navier, em 1821, data que marca o nascimento da teoria da elasticidade. Este trabalho atraiu a atenção de Cauchy que, partindo de diferentes suposições, formulou a teoria da elasticidade que se mantém inalterada até aos nossos dias.

Cauchy mostra que o estado de tensão num ponto interior de um corpo deformado fica completamente determinado por um conjunto de nove funções. Quando o corpo está em equilíbrio, estas nove funções satisfazem três equações diferenciais e o seu número reduz-se a seis, devido a relações de simetria. O estado de deformação é também determinado por seis funções que estão relacionados com o vector deslocamento, quando os deslocamentos são pequenos. Assim, quando o corpo é elástico e sofre pequenas deformações, assume-se que o conjunto de funções que caracterizam o estado de tensão se relaciona linearmente com o conjunto de funções que caracterizam a deformação. Esta suposição representa uma bem sucedida generalização da lei de Hooke. Eliminando as funções que caracterizam o estado de tensão, nas equações de Cauchy, obtém-se um conjunto de três equações diferenciais com a mesma estrutura que as equações de Navier, mas contendo duas constantes elásticas em vez de uma só. Estes importantes resultados foram apresentados por Cauchy em 1822. Mais tarde, Cauchy usou uma lei da interacção molecular para generalizar estes reultados a meios anisotrópicos.

George Green apresenta um revolucionário princípio da conservação da energia elástica que conduz à formulação de problemas básicos de elasticidade.

Os trabalhos de Navier, Cauchy e Green não se preocupam com problemas isolados, mas sim com a formulação de bases e teorias gerais. No que respeita a problemas relacionados com a torsão e a flexão de cilindros, foram de grande importância as contribuições de Barré de Saint-Venant.

Os progressoss do século passado tiveram em atenção, principalmente, os problemas de existência de soluções e integração de diferentes categorias de problemas com valores de fronteira.

2.1.2. Deformação

Num grande número de problemas, a estrutura da matéria pode ser ignorada e o corpo substituído por um modelo matemático contínuo cujos pontos geométricos se identificam com os pontos materiais do corpo.

Quando a posição relativa dos pontos num corpo contínuo é alterada, diz-se que o corpo está deformado. A mudança na posição relativa dos pontos é uma deformação.

Considere-se o corpo , que ocupa, no estado não deformado, uma região R definida num sistema de eixos ortogonais $OX_1X_2X_3$. Neste estado, as coordenadas de um ponto P de são x_1, x_2, x_3 . No estado deformado, os pontos de ocuparão uma região R e as coordenadas do mesmo ponto material P serão x_1, x_2, x_3 . As equações que caracterizam a deformação serão

$$x_i \quad x_i \; x_1, x_2, x_3 \quad x_i \; x \;, \qquad i \quad 1,2,3 \tag{2.1}$$

e a inversa

$$x_i \quad x_i \; x_1, x_2, x_3 \;. \quad x_i \; x \;, \qquad i \quad 1,2,3 \;. \tag{2.2}$$

2.1.3. Leis de Elasticidade

Os estados de tensão e de deformação num meio contínuo ficam completamente determinados pelo tensor das tensões $_{ij}$ e pelo tensor das deformações e_{ij}, respectivamente, e tem-se que

$$_{ij} \quad c_{ijkl} e_{kl} \qquad i, j, k, l \quad 1,2,3 \;. \tag{2.3}$$

Os coeficientes c_{ijkl} na forma linear variam, no meio, de ponto para ponto. No caso de c_{ijkl} serem independentes da posição do ponto, o meio é chamado homogeneamente elástico.

A lei expressa em (2.3) é uma generalização da Lei de Hooke que é usada no desenvolvimento da teoria linear da elasticidade.

Uma vez que as componentes de $_{ij}$ e c_{ijkl} são simétricas, cálculos simples permitem afirmar que a expressão (2.3) pode ser reescrita, de uma forma compacta, como

$$_{i} \quad c_{ij} e_j \qquad i, j \quad 1,2,3,4,5,6 \;. \tag{2.4}$$

As constantes c_{ij} são os *moduli* elásticos.

2.2.ELASTICIDADE NA MECÂNICA RELATIVISTA

Considere-se o espaço material, X, cujos pontos são partículas do meio contínuo elástico considerado na Mecânica Clássica de coordenadas x^A, com A 1, 2, 3, cuja 3-forma densidade é dada por $n_{ABC} \quad n_{ABC}$. Esta 3-forma está definida de maneira a que, quando integrada num volume em X, dá o número de partículas contidas nesse volume. Considere-se, também, a variedade espaço-tempo, M, de dimensão quatro, com pontos de coordenadas x^a, com a 0, 1, 2, 3, onde está definida uma métrica g_{ab}, a subvariedade aberta M , com $M \quad M$ e uma função projecção, , injectiva, pelo menos de classe C^1, tal que

$$: M \quad X \tag{2.5}$$

e $(M) \quad X$, sendo X uma subvariedade de X.

Esta função é um campo material análogo a um campo escalar com a diferença de que projecta num campo tridimensional, enquanto que o campo escalar o faz num campo unidimensional. Assumir-se-á que $^1 x$, sendo x um ponto qualquer de $X \quad (M)$, representa a linha de universo da partícula associada ao ponto x, do tipo tempo, em M . Assim, permite uma identificação da variedade tridimensional das linhas de universo com a variedade do espaço material X . A projecção determina um campo de vectores u^a tangente às linhas de universo em M, normalizados por $u^a u_a \quad 1$, que, por sua vez, define um campo de tensores projecção ortogonais h_{ab} tais que $h_{ab} \quad g_{ab} \quad u_a u_b$. Estes tensores verificam as condições $h^{ab}h_{bc} \quad h^a_c$ e $h_{ab}u^b \quad 0$ (condição de ortogonalildade). As bijecções (projecções) (push-forward) e (pull-back) que transformam tensores contravariantes de M em tensores contravariantes de X e tensores covariantes de X em tensores covariantes de M, respectivamente, são também duas funções importantes a considerar.

A respeito destas duas funções lineares, usar-se-á a convenção seguinte:

$$t^{a\ldots} \quad t^{A\ldots} \quad \text{e} \quad t_{A\ldots} \quad t_{a\ldots} \qquad (2.6)$$

em que as letras maiúsculas serão usadas em tensores em X e as letras minúsculas para tensores em M.

Será ainda de referir que o núcleo de , quando visto como uma função linear que transforma os vectores espaço-tempo v^a nos vectores do tipo espaço v^A, determina os vectores tangentes às linhas de universo das partículas. Dado um tensor do espaço-tempo, $t_{a\ldots}$, existe um tensor no espaço material, $t_{A\ldots}$, tal que o seu *pull back* é $t_{a\ldots}$ se e só se [7]:

1. Todas as contracções de v^a com $t_{a\ldots}$ são nulas, i.e., $t_{a\ldots}$ e as linhas de fluxo são ortogonais;
2. $t_{a\ldots}$ é "Lie dragged" por v^a; $L_v t_{a\ldots} \quad 0$.

O *pull-back* da densidade de partículas $n_{abc} \quad n_{ABC}$ será usado para definir a corrente de partículas tangente às linhas de universo

$$n^a \quad \frac{1}{3!} \quad {}^{abcd} n_{bcd}, \qquad (2.7)$$

onde $_{abcd}$ é a forma elemento de volume do espaço-tempo associada a g_{ab}. Por construção, n^a é conservado,

$$ {}_a n^a \quad 0, \qquad (2.8)$$

representando $\;_a$ a derivada covariante. [7]

Uma vez que n^a é do tipo tempo, então,

$$n^a \quad nu^a, \qquad n \quad \sqrt{\;n^a n_a}\,, \qquad u^a u_a \quad 1 \qquad (2.9)$$

onde n é a densidade de partículas e u^a o vector 4-velocidade.

Considere-se a forma elemento de volume espacial

$$ {}_{abc} \qquad {}_{abcd} u^d \qquad (2.10)$$

de (2.7) e (2.9), vem que

$$\begin{aligned} n^a u_a \quad & nu^a u_a \\ & \tfrac{1}{3!} \; {}^{abcd} n_{bcd} u_a \end{aligned}$$

donde resulta

$$\begin{aligned} n \quad & \tfrac{1}{3!} \; {}^{bcda} n_{bcd} u_a \\ n \quad & \tfrac{1}{3!} \; {}^{bcd} n_{bcd} \\ n \; {}_{bcd} \quad & \tfrac{1}{3!} \; {}_{bcd} \; {}^{bcd} n_{bcd} \\ n \; {}_{bcd} \quad & \tfrac{1}{3!} .3! n_{bcd} \\ n \; {}_{bcd} \quad & n_{bcd} \end{aligned}$$

Assim,

$$n_{abc} \quad n \; {}_{abc} \qquad (2.11)$$

o que justifica a interpretação de n como a densidade de partículas.

A equação de estado pode ser dada a partir da densidade de energia em repouso, , como função de escalares que se formam pela contracção da inversa da métrica, g^{ab}, com o *pull-back* dos campos de tensores covariantes do espaço material. A densidade de partículas pode ser usada como um dos escalares, uma vez que, de acordo com a equação (2.11), é dada pela contracção

$$n^2 \quad \tfrac{1}{3!} n^{abc} n_{abc}$$
$$\tfrac{1}{3!} g^{ad} g^{be} g^{cf} n_{abc} n_{def} \qquad (2.12)$$

pois

$$n^{abc} n_{abc} \quad n \;\; {}^{abc} n \;\; {}_{abc}$$
$$n^2 \;\; {}^{abc} \;\; {}_{abc} \quad n^2.3!$$

logo,

$$n^2 \quad \tfrac{1}{3!} n^{abc} n_{abc}$$

o que conduz à igualdade (2.12).

O estudo do formalismo projecção pode fazer-se de forma muito completa em [6].

Dada uma equação de estado, o tensor de impulsão-energia, para matéria elástica, é da forma

$$T_{ab} \quad g_{ab} \quad 2\frac{}{g^{ab}}$$
$$u_a u_b \quad p_{ab} \qquad (2.13)$$

com

$$p_{ab} \quad 2\frac{}{g^{ab}} \quad h_{ab}, \quad u^a p_{ab} \quad 0 \quad \text{e} \quad h_{ab} \quad u_a u_b \quad g_{ab} \qquad (2.14)$$

Partindo de um Lagrangiano, $L_M \quad 2 \quad g^{\frac{1}{2}}$, e aplicando o método variacional, obtém-se T_{ab} dado por

$$T_{ab} \quad g^{\frac{1}{2}} \frac{L_M}{g^{ab}}, \qquad (2.15)$$

Uma vez que, neste caso, se supõe que L_M depende apenas de g_{ab}, tem-se

$$\frac{L_M}{g_{ab}} \quad \frac{L_M}{g_{ab}}$$
$$2\left(\frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{g}{g^{ab}} \quad \sqrt{g} \frac{}{g^{ab}} \right)$$
$$2\left(\frac{1}{2\sqrt{g}} g g_{ab} \quad \sqrt{g} \frac{}{g^{ab}} \right)$$

$$\sqrt{\quad g}\left(g_{ab} \qquad 2\frac{}{g^{ab}}\right) \tag{2.16}$$

Então, substituindo (2.16) em (2.15), obtém-se

$$T_{ab} \qquad \frac{1}{\sqrt{\quad g}}\left[\sqrt{\quad g}\left(g_{ab} \qquad 2\frac{}{g^{ab}}\right)\right]$$

$$g_{ab} \qquad 2\frac{}{g^{ab}}$$

verificando-se que (2.15) obedece à definição de tensor impulsão-energia para matéria elástica.

Pode reescrever-se a densidade de energia em repouso como $\qquad n$ onde representa a energia por partícula.

Escrevendo a equação (2.12) como,

$$n^2 \qquad g^{ad}\left(\tfrac{1}{3!}g^{be}g^{cf}n_{abc}n_{def}\right) \tag{2.17}$$

e, derivando ambos os membros desta equação em ordem a g^{ab}, obtém-se

$$2n\frac{n}{g^{ab}} \qquad \tfrac{1}{3!}g^{be}g^{cf}n_{abc}n_{def} \tag{2.18}$$

Uma vez que

$$g_{ab} \qquad h_{ab} \quad u_a u_b$$

logo,

$$g^{ab} \qquad h^{ab} \quad u^a u^b$$

e

$$u^b n_{abc} \qquad u^a n_{abc} \qquad u^c n_{abc} \qquad 0,$$

as expressões (2.17) e (2.18) podem escrever-se, respectivamente, como

$$n^2 \qquad h^{ad}\left(\tfrac{1}{3!}h^{be}h^{cf}n_{abc}n_{def}\right) \tag{2.19}$$

e

$$2n\frac{n}{g^{ab}} \qquad \tfrac{1}{3!}h^{be}h^{cf}n_{abc}n_{def} \tag{2.20}$$

logo,

$$2n\frac{n}{g^{ab}} \qquad h_{ad}h^{ad}\left(\tfrac{1}{3!}h^{be}h^{cf}n_{abc}n_{def}\right)$$

$$2n\frac{n}{g^{ab}} \qquad n^2 h_{ad}$$

$$\frac{n}{g^{ab}} \qquad \frac{1}{2} n h_{ad} \tag{2.21}$$

Substituindo n na definição de p_{ab} dada pela expressão (2.14), deduz-se

$$p_{ab} \qquad 2\frac{\quad}{g^{ab}} \qquad h_{ab}$$

$$2\left(\frac{n}{g^{ab}} \quad n\frac{\quad}{g^{ab}} \right) \quad n \;\; h_{ab}$$

$$2 \;\; \frac{n}{g^{ab}} \quad 2n\frac{\quad}{g^{ab}} \quad n \;\; h_{ab} \tag{2.22}$$

Substituindo a igualdade (2.21) nesta última expressão, obtém-se a seguinte relação entre p_{ab} e :

$$p_{ab} \qquad 2n\frac{\quad}{g^{ab}}. \tag{2.23}$$

Assim, conclui-se que os escalares que se formam na variedade espaço-tempo por contracção de g^{ab} com os tensores *pulled-back* $t_{a\ldots}$ $t_{A\ldots}$ podem, alternativamente, ser formados no espaço material por construções análogas dos tensores *push-forward* g^{AB} g^{ab} h^{ab} com os tensores $t_{A\ldots}$. Então, em todos os pontos de X', poder-se-á considerar a densidade de energia como uma função de g^{AB} e tensores $t_{A\ldots}$ fixos do espaço material. Desta forma, poder-se-á assumir que tem um valor mínimo sob variações de g^{AB}, quando a densidade de partículas é fixa. Este estado denomina-se *estado não deformado*. Isto permite a introdução de um tensor, $_{AB}$,no espaço material, dependente de n, tal que g^{AC} $_{CB}$ $^{A}_{B}$ quando , i.e., define-se $_{AB}$ de forma a que o mínimo de g^{AB} ocorra quando g^{AB} ^{AB}. Se , que é função apenas de n, tem um mínimo para uma determinada densidade de partículas n n_0, tem-se que tem um mínimo absoluto sob todas as variações de g^{AB}. Este caso refere-se ao *estado não deformado*. Não se assumirá a existência deste estado, pois a estrutura material no interior de uma estrela de neutrões deve-se às altas pressões que aí ocorrem.

Demonstra-se que o *pull-back* do elemento de volume de Levi-Civita de $_{AB}$ coincide com o elemento de volume espacial $_{abc}$. Então, denote-se por $_{ABC}$ a forma elemento de volume de $_{AB}$, uma vez que se tem $_{ABC}$ $_{abc}$. A relação entre $_{ABC}$ e a densidade de partículas n_{ABC} é análoga à equação (2.11) para os seus *pull-back* $_{abc}$e n_{abc}, i.e.,

$$n_{ABC} \quad n \; _{ABC} \tag{2.24}$$

Será importante relembrar que a densidade de partículas n_{ABC} é um tensor fixo do espaço material, independente de n, uma vez que corresponde ao estado de repouso. É possível e conveniente, agora, definir um novo tensor k_{AB} conforme a $_{AB}$, i.e., k_{AB} $_{AB}$, cujo elemento de volume é n_{ABC}, i.e.,

$$k^{AB} \quad ^{1} \; ^{AB} \quad ^{AB} \quad k^{AB} \tag{2.25}$$

Por definição,

$$^{AB} \; ^{CD} \; ^{EF} \; _{ACE} \; _{BDF} \quad 3! \tag{2.26}$$

e

$$k^{AB}k^{CD}k^{EF}n_{ACE}n_{BDF} \quad 3! \tag{2.27}$$

Das equações (2.24), (2.25) e (2.27), vem

$$^{3} \; ^{AB} \; ^{CD} \; ^{EF} n^{2} \; _{ACE} \; _{BDF} \quad 3!$$

$$^{3}n^{2} \; ^{AB} \; ^{CD} \; ^{EF} \; _{ACE} \; _{BDF} \quad 3! \tag{2.28}$$

que, por (2.26), é equivalente a

$$^{3}n^{2}3! \quad 3!$$

$$^{3} \quad n^{2}$$

$$n^{\frac{2}{3}} \qquad (2.29)$$

Pelo que, usando as expressões (2.25) e (2.29), o tensor k_{AB} define-se como

$$k_{AB} \quad n^{\frac{2}{3}} \quad {}_{AB} \qquad (2.30)$$

e, derivando (2.30) em ordem à densidade n, obtém-se

$$\begin{aligned}
&\frac{k_{AB}}{n} \quad \frac{2}{3} n^{\frac{1}{3}} \quad {}_{AB} \quad n^{\frac{2}{3}} \frac{{}_{AB}}{n} \\
&n^{\frac{1}{3}} \frac{k_{AB}}{n} \quad \frac{2}{3} \quad {}_{AB} \quad n \frac{{}_{AB}}{n} \\
&n \frac{{}_{AB}}{n} \quad \frac{2}{3} \quad {}_{AB} \quad n^{\frac{1}{3}} \frac{k_{AB}}{n} \\
&n \quad {}_{AB} \quad \frac{2}{3} \quad {}_{AB} \quad n^{\frac{1}{3}} k_{AB} \\
&n \quad {}_{AB} \quad \frac{2}{3} \quad {}_{AB} \quad {}_{AB}
\end{aligned} \qquad (2.31)$$

com

$$ {}_{AB} \quad n^{\frac{1}{3}} k_{AB} \qquad (2.32)$$

onde

$$k_{AB} \quad \frac{k_{AB}}{n} \quad \text{e} \quad {}_{AB} \quad \frac{{}_{AB}}{n}. \qquad (2.33)$$

Por definição,

$$\det k^{AB} \quad \frac{1}{3!} n_{ABC} n_{DEF} k^{AD} k^{BE} k^{CF} \qquad (2.34)$$

e uma vez que n_{ABC} é independente de n, também o é $\det k_{AB}$ logo,

$$\begin{aligned}
&\frac{}{n} \det k_{AB} \quad 0 \quad \frac{}{n} \frac{1}{3!} n^{ABC} n^{DEF} k_{AB} k_{CD} k_{EF} \quad 0 \\
&n^{ACE} n^{BDF} \frac{}{n} \; k_{AB} k_{CD} k_{EF} \quad 0 \\
&\frac{}{n} \; k_{AB} k_{CD} k_{EF} \quad 0 \\
&k_{CD} k_{EF} \frac{k_{AB}}{n} \quad k_{AB} k_{EF} \frac{k_{CD}}{n} \quad k_{AB} k_{CD} \frac{k_{EF}}{n} \quad 0
\end{aligned} \qquad (2.35)$$

contraindo esta última expressão com $k^{AB} k^{CD} k^{EF}$,

$$k^{AB}k^{CD}k^{EF}k_{CD}k_{EF}\frac{k_{AB}}{n} \quad k^{AB}k^{CD}k^{EF}k_{AB}k_{EF}\frac{k_{CD}}{n} \quad k^{AB}k^{CD}k^{EF}k_{AB}k_{CD}\frac{k_{EF}}{n} \quad 0$$

$$9k^{AB}\frac{k_{AB}}{n} \quad 9k^{CD}\frac{k_{CD}}{n} \quad 9k^{EF}\frac{k_{EF}}{n} \quad 0$$

$$k^{AB}\frac{k_{AB}}{n} \quad 0$$

$$k^{AB}k_{AB} \quad 0 \qquad (2.36)$$

A partir da equação (2.30), e do facto de

$$3 \quad k^{AB}k_{AB} \qquad (2.37)$$

obtém-se

$$3 \quad {}^{AB}n^{\frac{2}{3}} \; {}_{AB} \quad 3 \; n^{\frac{2}{3}}$$

pelo que

$$n^{\frac{2}{3}} \qquad (2.38)$$

e

$$k^{AB} \quad n^{\frac{2}{3}} \; {}^{AB}$$

$${}^{AB} \quad n^{\frac{2}{3}}k^{AB} \qquad (2.39)$$

Usando (2.31), deduz-se que

$$n \; {}_{AB} \quad \frac{2}{3} \; {}_{AB} \quad {}_{AB}$$

$$n \; {}^{AB} \; {}_{AB} \quad \frac{2}{3} \; {}^{AB} \; {}_{AB} \quad {}^{AB} \; {}_{AB} \qquad (2.40)$$

mas, por (2.32),

$${}^{AB} \; {}_{AB} \quad {}^{AB}n^{\frac{1}{3}}k_{AB}$$

$$n^{\frac{2}{3}}k^{AB}n^{\frac{1}{3}}k_{AB}$$

$$nk^{AB}k_{AB}$$

$$n.0$$

$$0 \qquad (2.41)$$

Então, a expressão (2.40) fica

$$n \; {}^{AB} \; {}_{AB} \quad \frac{2}{3} \; {}^{AB} \; {}_{AB}$$

$$n \; {}^{AB} \; {}_{AB} \quad \frac{2}{3}.3$$

$$n \quad ^{AB} \quad _{AB} \qquad 2 \tag{2.42}$$

O tensor $_{AB}$ é o chamado *compressional distortion tensor* e na decomposição de $n \quad _{AB}$ (expressão (2.40)) é o termo de traço nulo, uma vez que $^{AB} \quad _{AB} \quad 0.$ $_{AB}$ mede como a deformação se desvia de um escalar conforme quando se varia a densidade de partículas.

Veja-se, agora, o caso especial em que k_{AB} é independente de n, quando há deformação conforme, i.e., $_{AB} \quad 0$. Obrigue-se, ainda, que a energia por partícula, , seja uma função apenas de invariantes independentes que se formam a partir do tensor misto ortogonal à linha de fluxo:

$$k^{a}_{b} \quad g^{ac}k_{cb}, \qquad k_{ab} \qquad k_{AB} \tag{2.43}$$

Se se quer escrever o operador $\frac{}{g^{ab}}$ à custa do operador $\frac{}{k^{a}_{b}}$, pode usar-se a regra da cadeia

$$\frac{}{g^{ab}} \qquad \frac{k^{c}_{d}}{g^{ab}}\frac{}{k^{c}_{d}} \tag{2.44}$$

Além disso, tem-se

$$\frac{k^{c}_{d}}{g^{ab}} \qquad \frac{g^{fc}k_{fd}}{g^{ab}}$$

$$\frac{g^{fc}}{g^{ab}}.k_{fd} \quad g^{fc}\frac{k_{fd}}{g^{ab}}. \tag{2.45}$$

Dado que k_{ab} é uma métrica fixa, $\frac{k_{ab}}{g^{ab}} \quad 0$, a expressão (2.45) fica

$$\frac{k^{c}_{d}}{g^{ab}} \quad k_{fd}\frac{g^{fc}}{g^{ab}} \tag{2.46}$$

mas,

$$\frac{g^{fc}}{g^{ab}} \quad \frac{1}{2} \quad ^{f}_{a} \ ^{c}_{b} \qquad ^{f}_{b} \ ^{c}_{a} \ . \tag{2.47}$$

Então, de (2.46), vem

$$\frac{k^{c}_{d}}{g^{ab}} \quad k_{fd}\left[\frac{1}{2} \quad ^{f}_{a} \ ^{c}_{b} \qquad ^{f}_{b} \ ^{c}_{a}\right]$$

$$\tfrac{1}{2}\; k_{ad} \;\; {}^{c}_{b} \quad k_{bd} \;\; {}^{c}_{a}$$

$$\tfrac{1}{2}\; k_{da} \;\; {}^{c}_{b} \quad k_{db} \;\; {}^{c}_{a}$$

$$k_{d\;a} \;\; {}^{c}_{b}$$

$$ {}^{c}_{a}k_{b\;d} \tag{2.48}$$

Substiuindo (2.48) na expressão (2.44), tem-se

$$\frac{}{g^{ab}} \qquad \frac{k^{c}_{d}}{g^{ab}}\frac{}{k^{c}_{d}}$$

$$ {}^{c}_{a}k_{b\;d}\frac{}{k^{c}_{d}}$$

$$\left[\tfrac{1}{2}\; k_{ad} \;\; {}^{c}_{b} \quad k_{bd} \;\; {}^{c}_{a}\right]\frac{}{k^{c}_{d}}$$

$$k_{d\;a}\frac{}{k^{b}_{d}}. \tag{2.49}$$

Logo, aplicando $\frac{}{g^{ab}}$ a quantidades que dependem apenas de k^{a}_{b}, este operador pode reescrever-se como

$$\frac{}{g^{ab}} \qquad k_{d\;a}\frac{}{k^{b}_{d}}.$$

Uma vez que k^{a}_{b} é ortogonal a u^{a}, tem três escalares invariantes independentes que podem ser, por exemplo,

$$I_1 \quad k^{a}_{a}, \qquad I_2 \quad k^{a}_{b}k^{b}_{a} \qquad \text{e} \qquad I_3 \quad k^{a}_{b}k^{b}_{c}k^{c}_{a} \tag{2.50}$$

Sendo n_{ABC} o elemento de volume de k_{AB}, vem que a densidade de partículas n é também um escalar invariante de k^{a}_{b}.

Uma vez que

$$n^{abc} \qquad {}^{abc} \tag{2.51}$$

e

$$3! \quad n_{abc}n^{abc}$$

$$ {}^{abc}n_{abc}$$

$$ {}^{abc}n \;\; {}_{abc}$$

$$n \;\; 3! \tag{2.52}$$

então, como $\frac{1}{n}$, a expressão (2.51) fica

$$n^{abc} \quad \frac{1}{n} \quad {}^{abc}; \qquad (2.53)$$

$$n_{def} \quad n \quad {}_{def}, \text{ por definição;} \qquad (2.54)$$

$$\begin{aligned} k^d_a &\quad g^{dc}k_{ca} \\ &\quad g^{dc}n^{\frac{2}{3}} \quad {}_{ca} \\ &\quad n^{\frac{2}{3}}h^{dc} \quad {}_{ca} \\ &\quad n^{\frac{2}{3}} \quad {}^d_a; \end{aligned} \qquad (2.55)$$

e

$${}^{abc} \quad {}^d_a \quad {}^e_b \quad {}^f_c \qquad {}_{def}, \text{ também por definição,} \qquad (2.56)$$

vem que

$$\begin{aligned} \det k^a_b &\quad \frac{1}{3!}n^{abc}n_{def}k^d_a k^e_b k^f_c \\ &\quad \frac{1}{3!}\frac{1}{n} \quad {}^{abc}n \quad {}_{def}k^d_a k^e_b k^f_c \\ &\quad \frac{1}{3!} \quad {}^{abc} \quad {}_{def}k^d_a k^e_b k^f_c \\ &\quad \frac{1}{3!} \quad {}^{abc} \quad {}_{def}n^{\frac{2}{3}}n^{\frac{2}{3}}n^{\frac{2}{3}} \quad {}^d_a \quad {}^e_b \quad {}^f_c \\ &\quad n^2\frac{1}{3!} \quad {}^{def} \quad {}_{def} \\ &\quad n^2 \end{aligned} \qquad (2.57)$$

Assim, pode dizer-se que a densidade de partículas n é tal que

$$n^2 \quad \det k^a_b \; . \qquad (2.58)$$

Em vez de usar I_1, I_2, I_3 como o conjunto dos três invariantes escalares de k^a_b, pode ser mais conveniente usar o conjunto ao qual pertencem n e dois invariantes escalares independentes do tensor misto

$${}^a_b \quad h^{ac} \quad {}_{cb}, \qquad {}_{ab} \qquad {}_{AB} \qquad (2.59)$$

cujo desvio de h^a_b dá toda a informação sobre outras deformações que não as compressões conformes.

Da relação (2.55), $k^a_b \quad n^{\frac{2}{3}} \quad {}^a_b$, vem que

$$\det k^a_b \quad \tfrac{1}{3!} n_{abc} n^{def} k^a_d k^b_e k^c_f$$

$$\tfrac{1}{3!} \quad {}_{abc} \quad {}^{def} \, n^{\frac{2}{3}} \; 3 \quad {}^a_d \; {}^b_e \; {}^c_f$$

$$n^2 \det \quad {}^a_b \qquad (2.60)$$

mas, por (2.58),

$$\det k^a_b \quad n^2 \quad n^2 \det \quad {}^a_b \quad n^2$$

$$\det \quad {}^a_b \quad 1 \qquad (2.61)$$

${}^a_b$ tem dois invariantes independentes em vez de três, devido à sua invariância sob compressões conformes caracterizadas por

$$h_{ab} \quad C^{\;2} h_{ab} \qquad (2.62)$$

e nas quais

$$k^a_b \quad C^2 k^a_b \qquad (2.63)$$

$$k^a_b \quad g^{ac} k_{cb} \quad h^{ac} k_{cb} \quad C^2 h^{ac} k_{cb} \quad C^2 k^a_b \qquad (2.64)$$

uma vez que

$$h^{ac} \quad C^2 h^{ac} \qquad (2.65)$$

pois

$$h_{ac} h^{ac} \quad 3 \quad C^{\;2} h_{ac} \; h^{ac} \quad C^{\;2} \; .3 \qquad (2.66)$$

Então, da expressão (2.66), vem que

$$C^{\;2} \quad 1 \qquad C^2. \qquad (2.67)$$

Assim,

$$k^a_b \quad C^2 k^a_b \quad n^{\;\frac{2}{3}} \; {}^a_b$$

$$C^p n^{\;\frac{2}{3}} \; {}^a_b$$

$$C^{\frac{2p}{3}} n^{\frac{2}{3}} \; {}^a_b$$

$$C^{\frac{2p}{3}} k^a_b. \qquad (2.68)$$

Então,

$$2 \quad \tfrac{2p}{3} \qquad p \quad 3. \qquad (2.69)$$

Tem-se ainda que

$$n \qquad C^{3} n \tag{2.70}$$

Pode, obter-se, agora, uma outra expressão para o tensor pressão, p_{ab}, sabendo que a decomposição $k^{a}_{b} \quad n^{\frac{2}{3}} \quad {}^{a}_{b}$ de k^{a}_{b} num produto do factor conforme $n^{\frac{2}{3}}$ pelo tensor misto ${}^{a}_{b}$ de determinante igual a um permite chegar a uma definição de $\frac{}{g^{ab}}$, quando aplicada a invariantes (escalares ou tensoriais) de k^{a}_{b}.

Por definição, tem-se que

$$t_{ab} \qquad t_{ab} \qquad \tfrac{1}{3} t^{c}_{c} h_{ab}. \tag{2.71}$$

Das equações (2.21) e (2.48), obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{{}^{c}_{d}}{g^{ab}} \qquad & \frac{\left(n^{\ \frac{2}{3}} k^{c}_{d}\right)}{g^{ab}} \\
& \frac{2}{3} \frac{n}{g^{ab}} n^{\ \frac{5}{3}} k^{c}_{d} \qquad n^{\ \frac{2}{3}} \frac{k^{c}_{d}}{g^{ab}} \\
& \frac{2}{3} . \frac{1}{2} n h_{ab} n^{\ \frac{5}{3}} k^{c}_{d} \qquad n^{\ \frac{2}{3}} \ {}^{c}{}_{a} k_{b\ d} \\
& \frac{1}{3} n^{\ \frac{2}{3}} k^{c}_{d} h_{ab} \qquad n^{\ \frac{2}{3}} \ {}^{c}{}_{a} k_{b\ d} \\
& \frac{1}{3} \ {}^{c}_{d} h_{ab} \qquad n^{\ \frac{2}{3}} \ {}^{c}{}_{a} k_{b\ d} \\
& \frac{1}{3} \ {}^{c}_{d} h_{ab} \qquad {}^{c}{}_{a} \quad {}_{b\ d}.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Logo, pode deduzir-se que

$$\begin{aligned}
\frac{}{g^{ab}} \qquad & \frac{}{n} \frac{n}{g^{ab}} \qquad \frac{}{{}^{c}_{d}} \frac{{}^{c}_{d}}{g^{ab}} \\
& \frac{}{n} \frac{1}{2} n h_{ab} \qquad \frac{}{{}^{c}_{d}} \left(\ \frac{1}{3} \ {}^{c}_{d} h_{ab} \qquad {}^{c}{}_{a} \quad {}_{b\ d} \right) \\
& \frac{1}{2} n h_{ab} \frac{}{n} \qquad {}_{c\ a} \frac{}{{}^{b}_{c}} \qquad \frac{1}{3} \ {}^{c}_{d} h_{ab} \frac{}{{}^{c}_{d}} \\
\frac{}{g^{ab}} \qquad & \frac{1}{2} n h_{ab} \frac{}{n} \qquad {}_{c\ a} \frac{}{{}^{b}_{c}}
\end{aligned} \tag{2.73}$$

$\frac{}{g^{ab}}$, quando aplicado a invariantes (escalares ou tensoriais) de k^{a}_{b}, pode escrever-se como

$$\frac{}{g^{ab}} \quad \tfrac{1}{2} n h_{ab} \frac{}{n} \quad {}_{c}\;{}_{a} \frac{}{{}^{b}_{c}} \qquad (2.74)$$

Especificando como função de n e de ${}^{a}_{b}$, o tensor pressão pode reescrever-se como

$$p_{ab} \quad p h_{ab} \quad {}_{ab}, \qquad {}^{a}_{a} \quad 0 \qquad (2.75)$$

com

$$p \quad n^{2} \frac{}{n} \qquad (2.76)$$

e

$$_{ab} \quad 2n \;{}_{c}\;{}_{a} \frac{}{{}^{b}_{c}} \qquad (2.77)$$

Esta expressão mostra claramente que a dependência de na densidade de partículas n está directamente relacionada com a pressão p e que a sua dependência em ${}^{a}_{b}$ está relacionada com o tensor anisotrópico da pressão, ${}_{ab}$, de traço nulo.

2.3. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE MATÉRIA ELÁSTICA

Veja-se, agora, a equação de movimento ${}_{b}T^{ab}$ 0 que pode obter-se variando a acção material (2.16) no que respeita à bijecção .

Para qualquer tensor impulsão-energia da forma

$$T^{ab} \quad u^{a}u^{b} \quad p_{ab}, \qquad u^{a}u_{a} \quad 1, \qquad u^{a}p_{ab} \quad 0 \qquad (2.78)$$

a condição ${}_{b}T^{ab}$ 0 decompõe-se em duas condições referentes à sua projecção na direcção de u^{a}, $u_{b}\;{}_{a}T^{ab}$ 0, e ortogonal a u^{a}, $h^{c}_{a}\;{}_{b}T^{ab}$ 0. A conexão projectada no espaço material, D_{a}, é definida pela sua acção num tensor arbitrário $t^{b\ldots}_{a\ldots}$ por

$$D_a t^{b\ldots}_{c\ldots} \quad h^d_a h^b_e \ldots h^f_c \ldots \quad {}_d t^{e\ldots}_{f\ldots} \tag{2.79}$$

Veja-se o caso da projecção ao longo de u^a. A condição $u_b \quad {}_a T^{ab} \quad 0$ que caracteriza esta projecção pode ser escrita como

$$\begin{aligned} u_b \quad {}_a T^{ab} &\quad u_b \quad {}_a \quad u^a u^b \quad p^{ab} \\ &\quad u_b u^b \quad {}_a u^a \quad u_b u^a \quad {}_a u^b \quad u_b u^a u^b \quad {}_a \quad u_b \quad {}_a p^{ab} \\ &\quad {}_a u^a \quad u_b u^a \quad {}_a u^b \quad u^a \quad {}_a \quad u_b \quad {}_a p^{ab} \\ &\quad 0. \end{aligned} \tag{2.80}$$

Como $u^a \quad {}_a$, a equação (2.80) escreve-se

$$ {}_a u^a \quad u_b u^a \quad {}_a u^b \quad u_b \quad {}_a p^{ab} \quad 0 \tag{2.81}$$

mas,

$$\begin{aligned} u_b \quad {}_a p^{ab} &\quad {}_a \; u_b p^{ab} \quad p^{ab} \quad {}_a u_b \\ &\quad p^{ab} \quad {}_a u_b, \end{aligned} \tag{2.82}$$

logo, a expressão (2.81) escreve-se

$$\begin{aligned} &{}_a u^a \quad u_b u^a \quad {}_a u^b \quad p^{ab} \quad {}_a u_b \quad 0 \\ &\quad {}_a u^a \quad u_b u^a \quad {}_a u^b \quad p^{ab} \quad {}_a u_b \quad 0. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} p^{ab} \quad {}_{ab} &\quad p^{ab} D \; {}_a u_b \\ &\quad \tfrac{1}{2} p^{ab} \; D_a u_b \quad D_b u_a \\ &\quad \tfrac{1}{2} p^{ab} D_a u_b \quad \tfrac{1}{2} p^{ab} D_b u_a \end{aligned} \tag{2.84}$$

que, dada a simteria de p^{ab}, é igual a

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} p^{ba} D_a u_b &\quad \tfrac{1}{2} p^{ab} D_b u_a \\ &\quad p^{ab} D_a u_b \\ &\quad p^{ab} \quad {}_a u_b, \end{aligned} \tag{2.85}$$

a equação (2.83) toma a forma

$$ {}_a u^a \quad u_b u^a \;\; {}_a u^b \quad p^{ab} \;\; {}_{ab} \quad 0 \qquad (2.86) $$

O termo ${}_a u^a \quad u_b u^a \;\; {}_a u^b$ desta expressão pode escrever-se como

$$ \begin{aligned} & {}_a u^a \quad h^{ab} \;\; g^{ab} \;\; {}_a u^b \\ & \quad {}_a u^a \quad h^{ab} \;\; {}_a u^b \quad g^{ab} \;\; {}_a u^b \\ & \quad {}_a u^a \quad h^{ab} \;\; {}_a u^b \quad {}_a u^a \\ & h^{ab} \;\; {}_a u_b . \end{aligned} \qquad (2.87) $$

Além disso,

$$ h^{ab} \;\; {}_{ab} \quad \tfrac{1}{2} \; h^{ab} \; D_a u_b \quad D_b u_a \qquad (2.88) $$

que, dada a simetria de h^{ab}, é igual a

$$ \begin{aligned} h^{ab} D_a u_b \quad & h^{ab} \; h^d_a h^e_b \;\; {}_d u_e \\ & h^{bd} h^e_b \;\; {}_d u_e \\ & h^{de} \;\; {}_d u_e . \end{aligned} \qquad (2.89) $$

Substituindo as expressões (2.87) e (2.89) em (2.86), obtém-se

$$ \begin{aligned} & h^{ab} \;\; {}_{ab} \quad p^{ab} \;\; {}_{ab} \quad 0 \\ & \quad h^{ab} \quad p^{ab} \;\; {}_{ab} \quad 0, \qquad \text{com} \quad {}_{ab} \quad D_{\,a} u_b \, . \end{aligned} \qquad (2.90) $$

que é uma das equações do movimento.

Veja-se, agora, o que acontece na projecção ortogonal a u^a.

A condição que caracteriza esta projecção, $h^c_a \;\; {}_b T^{ab} \quad 0$, pode escrever-se como

$$ \begin{aligned} & h^c_a \;\; {}_b \quad u^a u^b \quad p^{ab} \quad 0 \\ & \quad h^c_a u^a \;\; {}_b \quad u^b \quad h^c_a u^b \;\; {}_b u^a \quad h^c_a \;\; {}_b p^{ab} \quad 0 \\ & \quad h^c_a u^b \;\; {}_b u^a \quad h^c_a \;\; {}_b p^{ab} \quad 0 \end{aligned} \qquad (2.91) $$

Um simples cálculo mostra que

$$ p^{ab} \; u_b \quad D_b p^{cb} $$

$$p^{ab}u^{t} \quad {}_{t}u_{b} \quad h^{e}_{b}h^{b}_{f}h^{c}_{t} \quad {}_{e}p^{ft}$$

$$p^{ab}u^{t} \quad {}_{t}u_{b} \quad u^{e}u_{b} \quad g^{e}_{b} \quad u^{b}u_{f} \quad g^{b}_{f} \; h^{c}_{t} \quad {}_{e}p^{ft}$$

$$p^{ab}u^{t} \quad {}_{t}u_{b} \quad u^{e}u_{f}h^{c}_{t} \quad {}_{e}p^{ft} \quad u^{e}u_{f}h^{c}_{t} \quad {}_{e}p^{ft} \quad \ldots$$

$$\ldots \quad u^{e}u_{f}h^{c}_{t} \quad {}_{e}p^{ft} \quad g^{e}_{b}g^{b}_{f}h^{c}_{t} \quad {}_{e}p^{ft}$$

$$p^{ab}u^{t} \quad {}_{t}u_{b} \quad h^{c}_{t}u_{f}u^{e} \quad {}_{e}p^{ft} \quad {}^{e}_{f}h^{c}_{t} \quad {}_{e}p^{ft}$$

$$p^{ab}u^{t} \quad {}_{t}u_{b} \quad h^{c}_{t}p^{ft}u^{e} \quad {}_{e}u_{f} \quad h^{c}_{t} \quad {}_{f}p^{ft}$$

$$p^{ab}u^{t} \quad {}_{t}u_{b} \quad p^{cf}u^{e} \quad {}_{e}u_{f} \quad h^{c}_{t} \quad {}_{f}p^{ft}$$

$$h^{c}_{t} \quad {}_{f}p^{ft}$$

i.e.,

$$p^{ab} \; u_{b} \qquad D_{b}p^{cb} \qquad h^{c}_{t} \quad {}_{f}p^{ft}. \qquad (2.92)$$

Substituindo a expressão (2.92) na expressão (2.91) tem-se

$$h^{ca}u^{b} \quad {}_{b}u^{a} \quad p^{ab} \; u_{b} \qquad D_{b}p^{ab} \qquad 0$$

$$h^{ca} \; u_{b} \qquad p^{ab} \; u_{b} \qquad D_{b}p^{ab} \qquad 0$$

$$h^{ca} \qquad p^{ab} \quad u_{b} \qquad D_{b}p^{ab} \qquad 0, \qquad (2.93)$$

que é a segunda equação do movimento.

Assim, de (2.90) e (2.93), pode dizer-se que as equações do movimento tomam a forma

$$h^{ab} \quad p^{ab} \quad {}_{ab} \qquad 0 \qquad (2.94)$$

$$h^{ab} \quad p^{ab} \quad u \quad D_{b}p^{ab} \qquad 0 \qquad (2.95)$$

onde o ponto representa a derivada covariante ao longo de u^{a} e $\quad {}_{ab} \qquad D \; {}_{a}u_{b}$.

Quando u^{a} é hipersuperfície ortogonal, h_{ab} é a métrica induzida nas hipersuperfícies.

Neste caso, o operador D_{a} é a conexão Levi-Civita associada a h_{ab}. Apesar de D_{a}, de um modo geral, não ser uma conexão numa família de subvariedades do espaço-tempo, pode ser vista como uma pseudo-conexão de Levi-Civita de h_{ab}, uma vez que a propriedade

$$D_a h_{bc} \quad 0 \qquad (2.96)$$

se verifica sempre.

Como o espaço material tem uma métrica fixa, k_{AB}, o seu *pull-back*, k_{ab}, dá uma métrica alternativa nos subespaços tangentes ortogonais a u^a.

Poder-se-á, também, tomar a conexão Levi-Civita D_A de k_{AB} num operador diferencial D_a que actua sobre tensores do espaço-tempo. Os operadores D_a e D_a serão as conexões projectadas no espaço material que actuam sobre um tensor arbitrário $t^{b\cdots}_{c\cdots}$ da seguinte forma

$$D_a \; t^{b\cdots}_{c\cdots} \quad h^d_a h^b_e \ldots h^f_c \ldots \quad {}_d \; t^{e\cdots}_{f\cdots} \qquad (2.97)$$

em que ${}_d$ é a conexão definida em M e

$$D_a \qquad \left(D_A\right) \text{ está associado a } k_{ab}. \qquad (2.98)$$

Daqui vem que D_a é determinada unicamente por D_a e um campo de tensores ortogonais às linhas de fluxo, C^c_{ab}, tal que, para qualquer campo de vectores do espaço-tempo, X^c, se tem

$$D_a \; X^c \quad D_a X^c \quad C^c_{ab} X^b. \qquad (2.99)$$

O campo de tensores C^c_{ab} é o tensor da diferença da relasticidade (*relativistic elasticity difference tensor*), uma vez que o campo de tensores que dá a diferença entre as duas conexões é, por vezes, chamado o tensor diferença.

Para relacionar D_a com D_A impõe-se que, para qualquer vector do espaço-tempo, X^c, e campo de vectores Y^a, seja verdade que

$$\left(X^b \; D_b \; Y^a\right) \quad X^B \; D_B \; Y^A, \qquad X^B \qquad X^b, \qquad Y^A \qquad Y^a \qquad (2.100)$$

Tem-se que

$$D_a X^c \quad h_a^b h_d^c \quad {}_b X^d$$

$$\quad {}_a X^c \quad {}^c_{ab} X^b \qquad (2.101)$$

e

$$D_a \; X^c \quad h_a^b h_d^c \quad {}_b \; X^d$$

$$\quad {}_a X^c \quad {}^{c}_{ab} \; X^b \qquad (2.102)$$

logo

$$\left(D_a \quad D_a\right) X^c \quad h_a^b h_d^c \left({}_b \quad {}_b \right) X^d \quad \left({}^c_{ab} \quad {}^c_{ab} \right) X^b$$

$$C^c_{ab} X^b, \qquad (2.103)$$

Mostra-se que

$$C^a_{bc} \quad \tfrac{1}{2} k^{am} \; D_b k_{cm} \quad D_c k_{bm} \quad D_m k_{bc} \qquad (2.104)$$

com $\quad k^{ac} k_{cb} \quad h^a_b \;\; ; \;\; k^{ab} u_b \quad 0 \qquad (2.105)$

Por definição, tem-se que

$$0 \quad D_b \; k_{cm} \quad {}_b k_{cm} \quad {}^{e}_{cb} \; k_{em} \quad {}^{e}_{mb} \; k_{ec}$$

ou seja,

$${}_b k_{cm} \quad {}^{e}_{cb} \; k_{em} \quad {}^{e}_{mb} \; k_{ec}.$$

Além disso,

$$D_b k_{cm} \quad {}_b k_{cm} \quad {}^e_{cb} k_{em} \quad {}^e_{mb} k_{ec} \quad {}^{e}_{cb} \; k_{em} \quad {}^{e}_{mb} \; k_{ec} \quad {}^e_{cb} k_{em} \quad {}^e_{mb} k_{ec}.$$

Da mesma forma se obtêm

$$D_c k_{bm} \quad {}^{e}_{bc} \; k_{em} \quad {}^{e}_{mc} \; k_{eb} \quad {}^e_{bc} k_{em} \quad {}^e_{mc} k_{eb}$$

$$D_m k_{bc} \quad {}^{e}_{bm} \; k_{ec} \quad {}^{e}_{cm} \; k_{eb} \quad {}^e_{mb} k_{ec} \quad {}^e_{mc} k_{eb}.$$

Logo,

$$D_b k_{cm} \quad D_c k_{bm} \quad D_m k_{bc}$$

$$
{}^{e}_{cb}\ k_{em} \quad {}^{e}_{mb}\ k_{ec} \quad {}^{e}_{cb}k_{em} \quad {}^{e}_{mb}k_{ec} \quad {}^{e}_{bc}\ k_{em} \quad {}^{e}_{mc}\ k_{eb} \quad {}^{e}_{bc}k_{em} \quad \ldots
$$

$$
\ldots \quad {}^{e}_{mc}k_{eb} \quad {}^{e}_{bm}\ k_{ec} \quad {}^{e}_{cm}\ k_{eb} \quad {}^{e}_{mb}k_{ec} \quad {}^{e}_{mc}k_{eb} \quad 2 \quad {}^{e}_{bc}\ k_{em} \quad 2 \quad {}^{e}_{bc}k_{em}.
$$

Então,

$$
\tfrac{1}{2}k^{am}\ D_b k_{cm} \quad D_c k_{bm} \quad D_m k_{bc} \qquad \tfrac{1}{2}k^{am}\left(2 \quad {}^{e}_{bc}\ k_{em} \quad 2 \quad {}^{e}_{bc}k_{em}\right)
$$

$$
{}^{e}_{bc} \quad {}^{a}_{e} \quad {}^{e}_{bc} \quad {}^{a}_{e} \quad {}^{a}_{bc} \quad {}^{a}_{bc}.
$$

concluindo-se, assim, a igualdade (2.104).

O tensor C^{c}_{ab} é simétrico uma vez que

$$
C^{c}{}_{ab} \quad \tfrac{1}{2}\ C^{c}_{ab} \quad C^{c}_{ba}
$$

$$
\tfrac{1}{2}\left[\ \tfrac{1}{2}k^{cd}\ D_a k_{bd} \quad D_b k_{ad} \quad D_d k_{ab} \quad \tfrac{1}{2}k^{cd}\ D_b k_{ad} \quad D_a k_{bd} \quad D_d k_{ab}\ \right]
$$

$$
\tfrac{1}{4}k^{cd}\ 2D_a k_{bd} \quad 2D_b k_{ad} \quad 2D_d k_{ab}
$$

$$
\tfrac{1}{2}k^{cd}\ D_a k_{bd} \quad D_b k_{ad} \quad D_d k_{ab}
$$

$$
C^{c}_{ab} \tag{2.106}
$$

então,

$$
C^{c}_{ab} \quad C^{c}{}_{ab}
$$

Mais ainda, a conexão projectada D_a satisfaz

$$
\left(X^{b}\ D_b\ t^{a\ldots}\right) \quad X^{B}\ D_B\ t^{A\ldots}, \qquad X^{B} \qquad x^{b}, \qquad t^{A\ldots} \qquad t^{a\ldots} \tag{2.107}
$$

$$
\left(D_B\ t_{A\ldots}\right) \quad D_b\ t_{a\ldots}, \qquad t_{a\ldots} \qquad t_{A\ldots} \tag{2.108}
$$

Por definição, uma vez que D é a conexão associada a k_{AB}, vem que $D_C\ k_{AB} \quad 0$ logo,

$$
\left(D_C\ k_{AB}\right) \quad D_c\ k_{ab} \quad 0 \tag{2.109}
$$

Considerando $t^{b\cdots}_{c\cdots}$ um campo de tensores construído a partir de g^{ab} e k_{ab}, tem-se

$$\begin{aligned} D_a \ t^{b\ldots}_{c\ldots} \quad & \frac{t^{b\ldots}_{c\ldots}}{g^{de}} \ D_a \ g^{de} \\ & \frac{t^{b\ldots}_{c\ldots}}{g^{de}}\Big(D_a \quad D_a \Big) g^{de} \end{aligned} \qquad (\ 2.110\ )$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} D_a \ g^{de} \quad & D_a g^{de} \quad C^d_{at} g^{et} \quad C^e_{at} g^{dt} \\ & D_a g^{de} \quad C^{de}_a \quad C^{de}_a \quad D_a g^{de} \quad 2C^{de}_a \end{aligned} \qquad (\ 2.111\ )$$

a equação (2.110) escreve-se

$$\frac{t^{b\ldots}_{c\ldots}}{g^{de}} \ D_a g^{de} \quad 2C^{de}_a \quad D_a g^{de} \qquad 2\frac{t^{b\ldots}_{c\ldots}}{g^{de}} C^{de}_a , \qquad (\ 2.112\ )$$

logo,

$$\begin{aligned} D_a t^{b\ldots}_{c\ldots} \quad D_a \ t^{b\ldots}_{c\ldots} \quad & \Big(D_a \quad D_a \Big) t^{b\ldots}_{c\ldots} \\ & 2\frac{t^{b\ldots}_{c\ldots}}{g^{de}} C^{de}_a \quad t^{d\ldots}_{c\ldots} C^b_{ad} \quad \ldots \quad t^{b\ldots}_{d\ldots} C^d_{ac} \quad \ldots \end{aligned} \qquad (\ 2.113\ )$$

Em particular, se a energia por partícula é função apenas dos invariantes escalares de k^a_b, a divergência espacial do tensor pressão que aparece nas equações de Euler (2.95), usando (2.113), pode reescrever-se como

$$\begin{aligned} D_b p^{ab} \quad & 2\frac{p^{ab}}{g^{cd}} C^{cd}_b \quad p^{tb} C^a_{bt} \quad p^{at} C^b_{bt} \\ & 2\frac{p^{ab}}{g^{cd}} C^{cd}_b \quad p^b_t C^{at}_b \quad p^{ab} h_{ct} C^{ct}_b \\ & 2\frac{p^{ab}}{g^{cd}} C^{cd}_b \quad h^a_c p^b_t C^{ct}_b \quad p^{ab} h_{cd} C^{cd}_b \\ & 2\frac{p^{ab}}{g^{cd}} C^{cd}_b \quad h^a_c p^b_d C^{cd}_b \quad p^{ab} h_{cd} C^{cd}_b \\ & \Big(2\frac{p^{ab}}{g^{cd}} \quad h^a_c p^b_d \quad p^{ab} h_{cd} \Big) C^{cd}_b \\ & A^{ab}_{cd} C^{cd}_b \end{aligned} \qquad (\ 2.114\ )$$

onde

$$A^{ab}_{cd} \quad 2\frac{p^{ab}}{g^{cd}} \quad h^a_c p^b_d \quad p^{ab} h_{cd} \qquad (2.115)$$

é o tensor de elasticidade de Hadamard.

O tensor de elasticidade relativista obtém-se da equação anterior, expressão (2.115), como sendo

$$E^{ab}_{cd} \quad 2\frac{p^{ab}}{g^{cd}} \quad p^{ab} h_{cd}. \qquad (2.116)$$

Usando a igualdade (2.21), pode reescrever-se (2.116) da seguinte forma

$$\begin{aligned} E^{ab}_{cd} \quad & 2\frac{p^{ab}}{g^{cd}} \quad \frac{2}{n} p^{ab} \frac{n}{g^{ab}} \\ & \left(2n^2 \frac{p^{ab}}{g^{cd}} \quad \frac{2}{n}.n^2.p^{ab} \frac{n}{g^{ab}}\right).\frac{1}{n^2} \\ & 2n\left(n\frac{p^{ab}}{g^{cd}} \quad \frac{n}{n} p^{ab} \frac{n}{g^{ab}}\right).\frac{1}{n^2} \\ & 2n\left[\left(\frac{p^{ab}}{g^{cd}} n \quad p^{ab} \frac{n}{g^{ab}}\right).\frac{1}{n^2}\right] \\ & 2n\frac{}{g^{cd}}\left(\frac{p^{ab}}{n}\right). \end{aligned} \qquad (2.117)$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} p^{tk} \quad & g^{at} g^{bk} p_{ab} \\ & 2n g^{at} g^{bk} \frac{}{g^{ab}} \\ & 2n \frac{}{g_{tk}} \end{aligned} \qquad (2.118)$$

(2.117) pode reescrever-se como

$$\begin{aligned} E^{ab}_{cd} \quad & 2n\frac{}{g^{cd}}\left(\frac{p^{ab}}{n}\right) \\ & 2n\frac{}{g^{cd}}\left(\frac{2n}{n}\frac{}{g_{ab}}\right) \\ & 4n\frac{}{g^{cd}}\left(\frac{}{g_{ab}}\right) \\ & 4n\frac{2}{g^{cd}\, g_{ab}} \end{aligned} \qquad (2.119)$$

e

$$
\begin{aligned}
E^{abcd} \quad & E^{ab}_{ef} g^{ce} g^{df} \\
& g^{ce} g^{df} \left(\; 4n \frac{\;\;2\;\;}{g^{ef} \;\; g_{ab}} \right) \\
& \;\; 4n g^{ce} g^{df} \frac{\;\;}{g^{ef}} \frac{\;\;}{g_{ab}} \\
& 4n \frac{\;\;}{g_{cd}} \frac{\;\;}{g_{ab}} \\
& 4n \frac{\;\;2\;\;}{g_{cd} \;\; g_{ab}}
\end{aligned}
\qquad (2.120)
$$

Tanto A^{abcd} como E^{abcd} são tensores ortogonais às linhas de fluxo e simétricos na troca dos pares de índices ab e cd, i.e.,

$$A^{abcd} \quad A^{cdab} \qquad \text{e} \qquad E^{abcd} \quad E^{cdab} \qquad (2.121)$$

O tensor elasticidade E^{abcd} tem também a simetria

$$E^{abcd} \quad E^{\;ab\;\;cd} \qquad (2.122)$$

pois,

$$E^{\;ab\;\;cd} \qquad \tfrac{1}{2} \; E^{abcd} \quad E^{cdba} \qquad (2.123)$$

Então, as equações do movimento são dadas pelas equações de Euler, (2.95), que, usando a equação (2.114), podem reescrever-se como

$$
\begin{aligned}
h^{ab} \quad p^{ab} \quad u_b \quad D_b p^{ab} \quad 0 & \\
h^{ab} \quad p^{ab} \quad u_b \quad A^{ab}_{cd} C^{cd}_{b} \quad 0 & \\
h^{ab} \quad p^{ab} \quad u_b \quad A^{abcd} C_{cbd} \quad 0 &
\end{aligned}
\qquad (2.124)
$$

Neste capítulo, estudaram-se as equações de movimento da matéria elástica. São equações de estado que envolvem a pressão, a densidade de partículas, a métrica g_{ab} e os tensores da relatividade T^{ab}, C^{c}_{ab} que envolve dois tensores, um associado à física e outro à geometria do espaço, A^{ab}_{cd}, associado à física e relacionado com a equação de Euler e E^{ab}_{cd} - tensor da elasticidade -, também associado à equação de Euler.

CAPÍTULO 3

Aplicar-se-á, agora, a teoria da elasticidade descrita anteriormente no estudo de espaços-tempo estáticos com simetria esférica, tendo as estrelas de neutrões como modelo astrofísico.

Usando coordenadas de Schwarzschild, a métrica espaço-tempo escreve-se como

$$g_{ab} \quad u_a u_b \quad r_a r_b \quad t_{ab} \qquad (3.1)$$

com

$$u_a \quad e \quad dt_{\ a} \qquad (3.2)$$

$$r_a \quad e \quad dr_{\ a} \qquad e^{\ 2} \quad 1 \quad \tfrac{2m}{r} \qquad (3.3)$$

$$t_{ab} \quad r^2 \, d^{\ 2}{}_{ab} \qquad d^{\ 2} \quad d^{\ 2} \quad sen^2 \; d^{\ 2} \qquad (3.4)$$

Genericamente, o tensor de impulsão-energia será compatível com um espaço-tempo com simetria esférica, apenas se a métrica do espaço material k_{AB} tiver também simetria esférica e ainda se a transformação conservar as propriedades da simetria esférica.

Logo, por analogia com (3.1), tem-se

$$k_{AB} \quad r_A \quad r_B \quad t_{AB} \qquad (3.5)$$

onde,

$$r_A \quad e \left(d\, r\right)_A \qquad (3.6)$$

$$t_{AB} \quad r^2 \left(d^{\ 2}\right)_{AB}, \quad d^{\ 2} \quad d^{\ 2} \quad sen^2 \quad d^{\ 2} \qquad (3.7)$$

e é definido por

$$r \quad r \quad r \qquad (3.8)$$

e

$$d \quad ^{2} \qquad d \quad ^{2}. \qquad (3.9)$$

Uma vez que k^a_b é ortogonal à linha de fluxo e que h_{ab} (vista como métrica tridimensional) é positiva definida, os vectores próprios de k^a_b que correspondem a distintos valores próprios são, automaticamente, ortogonais, enquanto que vectores próprios com os mesmos valores próprios podem ser escolhidos ortogonais.

Mais ainda, uma vez que k_{ab} é também definida positiva, todos os valores próprios de k^a_b são positivos e poder-se-ão escrever como n^2, $\quad 1, 2, 3$, em função das suas raizes quadradas positivas n que representam densidades de partícula a uma dimensão nas direcções principais, i.e., ao longo dos vectores próprios.

Estas quantidades denominam-se densidades lineares principais de partículas ou, simplesmente, densidades lineares de partículas.

Os invariantes escalares de k^a_b podem ser reescritos em termos dos valores próprios de k^a_b. Logo, de acordo com (2.58), a densidade de partículas, n, é dada pelo produto das densidades lineares de partículas , i.e.,

$$n \quad n_1 n_2 n_3 \qquad (3.10)$$

Usando uma base ortogonal e^a de vectores próprios de k^a_b, pode escrever-se

$$g_{ab} \quad u_a u_b \quad \overset{3}{\underset{1}{}} \quad e_{\ a} . e_{\ b} \qquad (3.11)$$

e

$$k_{ab} \qquad {}_{1}^{3} \quad n^2 e_{\ a} e_{\ b} \tag{3.12}$$

Quando dois dos valores próprios de k^a_b são iguais, duas das densidades de partículas lineares, por exemplo n_2 e n_3, são também iguais. Esta situação pode encontrar-se, por exemplo, num caso de simetria esférica.

Denote-se

$$n_r \quad n_1 \qquad \text{e} \qquad n_t \quad n_2 \quad n_3 \tag{3.13}$$

onde r e t representam, respectivamente, os índices da densidade na direcção radial e na direcção tangencial.

Além disso,

$$r_a \quad e_{1a} \qquad \text{e} \qquad t_{ab} \quad h_{ab} \quad r_a r_b \quad e_{2a}e_{2b} \quad e_{3a}e_{3b} \tag{3.14}$$

com t^a_b o tensor (projecção) que projecta no plano formado pelos vectores próprios ortogonais associados a n_2 e n_3.

Assim, a métrica do espaço material k_{ab} pode ser escrita como

$$k_{ab} \quad n_r^2 r_a r_b \quad n_t^2 t_{ab} \tag{3.15}$$

Como $k_{ab} \quad {}^{1} \; k_{AB}$, a equação (3.5) permite escrever

$$k_{ab} \quad r_a \quad r_b \quad t_{ab} \tag{3.16}$$

Das expressões (3.15) e (3.16) resulta

$$\left(e \quad\right)^2 \left(d\ r\right)^2 \quad r^2 \left(d \quad {}^2 \quad\right)^2 \quad n_r^2\ e \quad {}^2\ dr\ {}^2 \quad n_t^2 r^2\ d \quad {}^2\ {}^2$$

$$\left(e \quad\right)^2 \left(d\ r\right)^2 \quad n_r^2\ e \quad {}^2\ dr\ {}^2 \quad \text{e} \quad r^2 \left(d \quad {}^2 \quad\right)^2 \quad n_t^2 r^2\ d \quad {}^2\ {}^2 \tag{3.17}$$

Tendo em consideração (3.8) e (3.9), obtém-se

$$n_r \quad \tfrac{dr}{dr} e \qquad \text{e} \quad n_t \quad \tfrac{r}{r} \tag{3.18}$$

Num espaço material plano, tem-se que $\quad 0$ e

$$r_A \quad (d\ r)_A \quad \text{e} \quad t_{AB} \quad r^2\left(d \quad ^2\right)_{AB} \tag{3.19}$$

logo,

$$k_{AB} \quad (d\ r)_A (d\ r)_B \quad r^2\left(d \quad ^2\right)_{AB}$$

$$(d\ r)_A (d\ r)_B \quad r^2\ d \quad ^2 \quad r^2\ sen^2 \quad d \quad ^2 \tag{3.20}$$

No entanto, de forma a considerar o caso mais geral, tome-se qualquer.

A densidade de partículas pode escrever-se, de acordo com (3.10), como

$$n \quad n_1 n_2 n_3$$

$$n_r n_t n_t$$

$$n_r\ n_t \quad ^2 \tag{3.21}$$

que, tomando o quociente adimensional,

$$z \quad \frac{n_r}{n_t} \qquad e \quad \frac{r}{r}\frac{dr}{dr} \tag{3.22}$$

se reescreve como

$$n \quad z\left(\frac{r}{r}\right)^3 \tag{3.23}$$

Independentemente da fonte de matéria que a origina, as equações de Einstein para um espaço-tempo estático com simetria esférica podem formular-se, segundo Bowers e Liang [3], como

$$\frac{d}{dr} \qquad \frac{m \quad \frac{1}{2}kr^3 p_r}{r\ r \quad 2m} \tag{3.24}$$

$$\frac{dm}{dr} \qquad \frac{1}{2}kr^2 \tag{3.25}$$

$$\frac{dp_r}{dr} \qquad p_r \qquad \frac{m \quad \frac{1}{2}kr^3 p_r}{r\ r \quad 2m} \qquad \frac{6q}{r}, \qquad\qquad q \quad \frac{1}{3}\ p_t \quad p_r \tag{3.26}$$

com

- velocidade de propagação da onda gravitacional

m - função de massa

r - parâmetro radial

k - constante de proporcionalidade das equações de Einstein

p_r - pressão na direcção radial

p_t - pressão na direcção tangencial

- densidade de energia

O sistema de equações (3.24) - (3.26) é indeterminado, a não ser que e p_t sejam funções conhecidas de p_r.

Uma equação de movimento adicional poderá ser encontrada se, a começar, se usarem n_r e n_t como duas variáveis independentes.

As equações de (3.18) levam à equação de evolução de n_t (equação que dá a evolução do parâmetro n_t na direcção radial).

$$\frac{dn_t}{dr} \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{r}{r}\right)$$

$$\frac{\frac{dr}{dr} r \quad r\frac{dr}{dr}}{r^2}$$

$$\frac{e \quad n_r r \quad r}{r^2}$$

$$\frac{e \quad n_r \quad n_t}{r}$$

$$\frac{1}{r}\left(e \quad n_r \quad n_t\right) \qquad (3.27)$$

A equação de evolução para n_r deduz-se a seguir.

$$\frac{dp_r}{dr} \quad \frac{p_r}{n_r}\frac{dn_r}{dr} \quad \frac{p_r}{n_t}\frac{dn_t}{dr}$$

$$\frac{dp_r}{dr} \quad \frac{p_r}{n_t}\frac{dn_t}{dr} \quad \frac{p_r}{n_r}\frac{dn_r}{dr}$$

$$\frac{dn_r}{dr} \quad \frac{n_r}{p_r}\left(\frac{dp_r}{dr} \quad \frac{p_r}{n_t}\frac{dn_t}{dr}\right) \qquad (3.28)$$

Como o módulo de compressão principal é dado por

$$n \quad \frac{p}{n} \qquad (3.29)$$

então,

$$r \quad n_r \frac{p_r}{n_r}$$

$$\frac{n_r}{r} \quad \frac{n_r}{n_r \frac{p_r}{n_r}} \quad \frac{n_r}{p_r}$$

pelo que a expressão (3.28) fica

$$\frac{dn_r}{dr} \quad \frac{n_r}{r}\left(\frac{dp_r}{dr} \quad \frac{p_r}{n_t}\frac{dn_t}{dr} \right) \qquad (3.30)$$

com $\frac{dp_r}{dr}$ e $\frac{dn_t}{dr}$ dadas por (3.26) e (3.27), respectivamente.

Conhecendo , p_r e q como funções de n_r e n_t, as equações (3.25), (3.27) e (3.30) originam um sistema de três equações a três incógnitas m, n_r e n_t:

$$\frac{dm}{dr} \quad \frac{1}{2}kr^2 \qquad (3.31)$$

$$\frac{dn_t}{dr} \quad \frac{1}{r}\left(e \quad n_r \quad n_t\right) \qquad (3.32)$$

$$\frac{dn_r}{dr} \quad \frac{n_r}{r}\left(\frac{dp_r}{dr} \quad \frac{p_r}{n_t}\frac{dn_t}{dr} \right) \qquad (3.33)$$

A equação do potencial gravitacional é independente das anteriores e, assim, a equação (3.24)

$$\frac{d}{dr} \quad \frac{m \ \frac{1}{2}kr^3 p_r}{r \ r \ 2m}$$

pode resolver-se depois de resolvido o sistema (3.31) - (3.33).

Do ponto de vista físico, é mais natural escrever o sistema (3.31)-(3.33) nas variáveis n e z, em vez de o fazer em função de n_r e n_t.

Para transformar as equações (3.27) e (3.30) em equações de evolução de n e z, comece-se por referir (3.23)

$$n \quad zn_t^3$$

$$n_t^3 \quad \frac{n}{z}$$

$$z \quad \frac{n}{n_t^3} \qquad (3.34)$$

Aplicando o operador $\frac{d}{dr}$ a ambos os termos da última equação de (3.34), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dr} \quad & \frac{d}{dr}\left(\frac{n}{n_t^3}\right) \\ & \frac{\frac{dn}{dr}n_t^3 \quad n^3\frac{dn_t}{dr}n_t^2}{n_t^6} \\ & \frac{1}{n_t^3}\frac{dn}{dr} \qquad \frac{3n}{n_t^4}\frac{dn_t}{dr}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Donde, pela primeira equação de (3.34), se tem

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dr} \quad & \frac{z}{n}\frac{dn}{dr} \qquad \frac{3}{n_t}z\frac{dn_t}{dr} \\ & z\left(\frac{1}{n}\frac{dn}{dr} \qquad \frac{3}{n_t}\frac{dn_t}{dr}\right) \end{aligned} \tag{3.36}$$

De (3.27), pode deduzir-se a expressão

$$\frac{1}{n_t}\frac{dn_t}{dr} \qquad \frac{1}{r}\Big(e \quad z \quad 1\Big) \tag{3.37}$$

e reescrever-se a equação de evolução de z como

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dr} \quad & z\left(\frac{1}{n}\frac{dn}{dr} \qquad \frac{3}{n_t}\frac{dn_t}{dr}\right) \\ & z\left(\frac{1}{n}\frac{dn}{dr} \qquad \frac{3}{r}\Big(e \quad z \quad 1\Big)\right) \end{aligned} \tag{3.38}$$

Para deduzir a equação de evolução para n, comecemos por tomar p_r como função de n e z, e usando (116), vem

$$\begin{aligned} \frac{dp_r}{dr} \quad & \frac{p_r}{n}\frac{dn}{dr} \qquad \frac{p_r}{z}\frac{dz}{dr} \\ & \frac{p_r}{n}\frac{dn}{dr} \qquad \frac{p_r}{z}\left(\frac{z}{n}\frac{dn}{dr} \qquad \frac{3z}{n_t}\frac{dn_t}{dr}\right) \\ & \left(\frac{p_r}{n} \qquad \frac{p_r}{z}\frac{z}{n}\right)\frac{dn}{dr} \qquad \frac{3z}{n_t}\frac{dn_t}{dr}z\frac{p_r}{z}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Como

$$\frac{p_r}{z} \qquad \frac{p_r}{n_r}\frac{n_r}{z} \qquad \frac{p_r}{n}\frac{n}{z},$$

usando (3.39), (3.26) e (3.37), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{p_r}{r} \qquad & \frac{r}{n}\frac{dn}{dr} \qquad \frac{3}{n_t}\frac{dn_t}{dr}z\frac{p_r}{z} \\ & \frac{r}{n}\frac{dn}{dr} \qquad \frac{p_r}{r} \qquad \frac{3}{n_t}\frac{dn_t}{dr}z\frac{p_r}{z} \\ \frac{dn}{dr} \quad & \frac{n}{r}\left[\quad p_r \qquad \frac{m \quad \frac{1}{2}kr^3p_r}{r\ r\ 2m} \qquad \frac{6q}{r} \quad 3z\frac{p_r}{z}\frac{1}{r}\Big(e \qquad 1\Big)\right] \\ \frac{dn}{dr} \quad & \frac{n}{r\ r}\left[\quad p_r \qquad \frac{m \quad \frac{1}{2}kr^3p_r}{r\ 2m} \quad 6q \quad 3z\frac{p_r}{z}\Big(e \qquad 1\Big)\right] \end{aligned} \tag{3.40}$$

Podem, então, escrever-se as equações de Einstein da seguinte forma

$$\tfrac{dm}{dr} \quad \tfrac{1}{2}kr^2 \tag{3.41}$$

$$\tfrac{dn}{dr} \quad \tfrac{n}{r \quad r}\Big[\quad p_r \qquad \frac{m \ \ \tfrac{1}{2}kr^3 p_r}{r \ \ 2m} \quad 6q \quad 3z\tfrac{p_r}{z}\Big(e \qquad 1\Big)\Big] \tag{3.42}$$

$$\tfrac{dz}{dr} \quad z\Big(\tfrac{1}{n}\tfrac{dn}{dr} \quad \tfrac{3}{r}\Big(e \quad z \quad 1\Big)\Big) \tag{3.43}$$

onde , p_r, q e $_r$ se relacionam através de uma equação de estado dependendo de dois parâmetros dada por $n{,}z$, i.e., uma energia por partícula que depende dos parâmetros n e z, e

$$n \tag{3.44}$$

$$p_r \quad n^2\tfrac{}{n} \quad 2q \tag{3.45}$$

$$q \quad \tfrac{1}{2}nz\tfrac{}{z} \tag{3.46}$$

$$
\begin{aligned}
{}_r \quad & n_r\tfrac{p_r}{n_r} \\
& n_r\Big(\tfrac{p_r}{n}\tfrac{n}{n_r} \quad \tfrac{p_r}{z}\tfrac{z}{n_r}\Big) \\
& n_r\Big(\tfrac{p_r}{n}n_t^2 \quad \tfrac{p_r}{z}\tfrac{1}{n_t}\Big) \\
& \tfrac{p_r}{n}n_r n_t^2 \quad \tfrac{p_r}{z}\tfrac{n_r}{n_t} \\
& n\tfrac{p_r}{n} \quad z\tfrac{p_r}{z}
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

O sistema (3.41) - (3.43) pode, agora, escrever-se para a equação de estado

$$\tfrac{}{n}s^2 \tag{3.48}$$

com

- energia por partícula no estado não deformado;

- densidade de energia no estado não deformado;

s^2 - escalar de deformação;

- módulo de rigidez.

Para facilitar a comparação com o caso do flui do perfeito, usar-se-á a relação

$$\frac{dn}{n} \qquad \frac{dp}{\quad} \tag{3.49}$$

para substituir a densidade de partículas n pela pressão existente antes da deformação p, como uma das variáveis independentes.

Então, tomando n, p e z como variáveis independentes, as equações de Einstein escrevem-se como

$$\frac{dm}{dr} \qquad \tfrac{1}{2}kr^2 \tag{3.50}$$

$$\frac{dp}{dr} \qquad \frac{\quad}{r \quad _r} \qquad p_r \quad \frac{m \quad \tfrac{1}{2}kr^3 p_r}{r \quad 2m} \quad 6q \quad \ldots$$

$$\ldots \quad 4\left(e \quad z \quad 1\right)\left[\quad 3 \quad \tfrac{3}{2}\left(1 \quad\right)q\right] \tag{3.51}$$

$$\frac{dz}{dr} \qquad \frac{z}{r}\left[\frac{r}{\quad}\frac{dp}{dr} \quad 3\left(e \quad z \quad 1\right)\right] \tag{3.52}$$

onde, por definição,

$$s^2, \qquad\qquad s^2 \quad \tfrac{1}{6}\, z^{\ 1} \quad z^{\ 2}, \tag{3.53}$$

$$q \qquad , \qquad\qquad \tfrac{1}{6}\, z^{\ 2} \quad z^2 \ , \tag{3.54}$$

$$, \tag{3.55}$$

$$p_r \quad p \quad 2q, \qquad p \quad p \quad \left(\quad 1\right) \tag{3.56}$$

$$\left(\quad p\right)\frac{dp}{d} \tag{3.57}$$

$$_r \qquad 4\left[\quad \left(\quad \tfrac{1}{2}\right)q\right], \tag{3.58}$$

$$\tfrac{4}{3} \quad \left[\quad \left(\quad 1\right) \quad \frac{d}{dp}\right] \tag{3.59}$$

Veja-se a dedução de (3.51). Usando a regra da cadeia e as expressões (3.49) e (3.42), vem que

$$\frac{dp}{dr} \qquad \frac{dp}{dn}\frac{dn}{dr}$$

$$\frac{\quad}{n}\frac{dn}{dr}$$

$$\frac{}{n}\frac{n}{r\ \ r}\Bigg[\qquad p_r\ \ \frac{m\ \ \frac{1}{2}kr^3 p_r}{r\ \ 2m}\quad 6q\quad 3z\frac{p_r}{z}\Big(e\quad z\quad 1\Big)\Bigg]$$

$$\frac{}{r\ \ r}\Bigg[\qquad p_r\ \ \frac{m\ \ \frac{1}{2}kr^3 p_r}{r\ \ 2m}\quad 6q\quad 4\Big(e\quad z\quad 1\Big)\frac{3}{4}z\frac{p_r}{z}\Bigg] \qquad (\ 3.60\ )$$

Assim, comparando as expressões (3.60) e (3.51), ter-se-á que ter

$$\frac{3}{4}z\frac{p_r}{z}\qquad 3\qquad \frac{3}{2}\Big(1\qquad\Big)q$$

$$z\frac{p_r}{z}\qquad \frac{4}{3}\qquad 4\qquad 2\Big(1\qquad\Big)q$$

(3.61)

De (3.47) vem que

$$r\qquad n\frac{p_r}{n}\qquad z\frac{p_r}{z}$$

$$z\frac{p_r}{z}\qquad r\qquad n\frac{p_r}{n} \qquad (\ 3.62\ )$$

e, de (3.56), pode deduzir-se que

$$\frac{p_r}{n}\qquad \frac{p_r}{p}\frac{p}{n}\qquad \frac{p}{n}\frac{}{p_r}\Big[p\quad\Big(\qquad 1\Big)\quad 2q\Big]$$

$$\frac{}{n}\Big[1\qquad \frac{d}{dp}\quad\Big(\qquad 1\Big)\frac{d}{dp}\quad 2\frac{dq}{dp}\Big].$$

Pelas expressões (3.53) a (3.59), pode afirmar-se que

$$\frac{d}{dp}\qquad \frac{4}{3}\qquad \Big(\qquad 1\Big)$$

$$\frac{d}{dp}\qquad \frac{d}{dp}s^2\qquad \frac{}{}s^2\qquad \frac{}{}$$

$$\frac{dq}{dp}\qquad \frac{d}{dp}\qquad \frac{}{}\qquad \frac{}{}q$$

e, destas igualdades e efectuando alguns cálculos simples, obtém-se

$$n\frac{p_r}{n}\qquad \frac{d}{dp}\qquad\Big(\qquad 1\Big)\frac{d}{dp}\quad 2\quad \frac{dq}{dp}$$

$$\frac{4}{3}\qquad\Big(\qquad 1\Big)\qquad\Big(\qquad 1\Big)\quad 2\quad q$$

$$\frac{4}{3}\qquad 2\qquad q.$$

Então, voltando à expressão (3.62), tem-se que

$$z\frac{p_r}{z}\qquad r\qquad n\frac{p_r}{n}$$

$$r \quad \tfrac{4}{3} \quad 2 \quad q$$

$$4 \quad 4\left(\quad \tfrac{1}{2}\right)q \quad \tfrac{4}{3} \quad 2 \quad q$$

$$4 \quad \tfrac{4}{3} \quad 2 \quad q \quad 2q$$

$$\tfrac{4}{3} \quad 4 \quad 2\left(1 \quad \right)q,$$

provando-se, assim, a igualdade (3.60) e, consequentemente, (3.51).

As soluções das equações de Einstein em espaços com simetria esférica poderão servir de base para o estudo de configurações mais genéricas. As soluções obtidas não terão grande interesse por si só, uma vez que, pelo menos, para escolhas realistas de , não diferem muito do modelo do fluído perfeito. É importante, no entanto, ter um bom controlo e compreensão do modelo de base, quando se aplica uma solução com simetria esférica em vizinhanças com menor simetria. Uma característica dos modelos aqui apresentados é o facto de a equação de estado advém do uso de um espaço material sem curvatura numa grande região.

Bibliografia

[1] Bennoun, J. F. (1965). **Annls Inst**. **Henri Poincaré** A 3, 41.

[2] Bishop, Richard L., and Goldberg, Samuel I. (1980). **Tensor Analysis on Manifolds**. Dover Publications, Inc.

[3] Bowers, R. L., Liang E. P.T. (1974). **Astrophys**. **J**. **188** 657.

[4] Carter, B., Quintana, H. (1972). **Foundations of general relativistic high-pressure elasticity theory**. Institute of Theoretical Astronomy, University of Cambridge.

[5] De Felice and Clarke (1990). **Relativity on curved manifolds**. Cambridge University Press.

[6] De Witt, B. S. (1962). **The quantization of geometry**, **in Gravitation**: **an introduction to current research**. L. Witten. Wiley.

[7] D'Inverno, Ray (2003). **Introducing Einstein**'**s Relativity** (8ª edição). Clarendon Press, Oxford.

[8] Dyson, F. J. (1971). **Ann**. **Phys**. **Lpz**. **63**, 1.

[9] Einstein, Albert (tradução de Mário Silva) (2003). **O Significado da Relatividade**. Gradiva.

[10] Hawking, S.H. and Ellis, G.F.R. (1993). **The large scale structure of space-time**. Cambridge University Press

[11] Karlovini, Max, and Samuelson, Lars (2003). **Classical and Quantum Gravity**, **20**, **3613** - **3648**. Stockholm University. Suécia

[12] Kramer, Stephani, MacCallum, Herlt (1980). **Exact Solutions of Einstein's field equations**. Cambridge University Press.

[13] Martin, Daniel (1991). **Manifold Theory - an introduction for mathematical physicists**. Ellis Horwood Limited.

[14] Nunes, J.C. (2003). **A Elasticidade e a Mecânica Relativista**. Dissertação de Mestrado. Universidade do Minho. Portugal

[15] Oliveira, E. R. A. (1999). **Elementos da Teoria da Elasticidade**. Colecção Ensino da Ciência e da Tecnologia.

[16] Parker, Barry (2000). **A descoberta de Einstein**. Edições 70.

[17] Ramos, M. P. M. (1992). **The Lorentz Group**. Tese de Mestrado. Universidade de Aberdeen. Escócia.

[18] Rayner, C. B. (1963). **Proc**. **R**. **Soc**. **Lond**. **A 272**, 44.

[19] Schutz, Bernard F. (1984). **A first course in general relativity**. Cambridge University Press

[20] Sokolnikoff, I. S. (1983). **Mathematical Theory of Elasticity**. Krieger Publishing Company.

[21] Stephani (1990). **General Relativity**. Cambridge University Press.

[22] Wald, Robert M. (1984). **General Relativity**. The University of Chicago Press.

[23] Revista Portuguesa de Filosofia: Espaço - Tempo - Evolução, Albert Einstein e Pierre Teilhard de Chardin, vol 61 (2005) fasc1.